Corollario Sia $f \in End(V)$ e $\dim V = n$. Se p_f ha n radici distinte in $\mathbb{K}$ allora f è diagonalizzabile.

Dim $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ radici di p_f, $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j \implies$

$p_f = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x) \implies m_a(\lambda_i) = 1 \implies$

$m_g(\lambda_i) = 1$ e quindi f è diagonalizzabile per il teorema di diagonalizzazione.

Corollario Sia V uno spazio vettoriale complesso, $\dim V = n$, e sia $f \in End(V)$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ le radici distinte di p_f. Allora f è diagonalizzabile $\iff m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ $\forall i = 1, \dots, k$.

Dim Per il Teorema fondamentale dell'algebra p_f ha tutte le radici in $\mathbb{C} \implies$

$m_a(\lambda_1) + \cdots + m_a(\lambda_k) = \dim V$. La tesi segue dal teorema.

Es 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$

$p_A = (1-x)^2 + 4 = (1-2i-x)(1+2i-x)$

$\lambda_1 = 1-2i$, $\lambda_2 = 1+2i$ autovalori

$\lambda_1)$ $(A - (1-2i) I_2) X = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$ix + y = 0$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ base di $Aut(1-2i)$

$\lambda_2)$ $(A - (1+2i) I_2) X = 0$ $\quad \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$-ix + y = 0$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$v = (v_1, v_2)$ base diagonalizzante $\quad M_v(L_A) = \begin{pmatrix} 1-2i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}$

$$S = M^{\mathcal{E}}_{v}(id_{\mathbb{C}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \qquad \det S = 2i$$

$$S^{-1} = M^{v}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{C}^2}) = \frac{1}{2i}\,{}^t\!\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$A = S D S^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} 1-2i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix}$$

2) $J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \qquad p_{J_\lambda} = \begin{vmatrix} \lambda - x & 1 \\ 0 & \lambda - x \end{vmatrix} = (\lambda - x)^2$

$\lambda \in \mathbb{C}$ è unico autovalore

$m_a(\lambda) = 2$

$(J_\lambda - \lambda I_2) X = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad y = 0$

$Aut(\lambda) = span(e_1)$

((e_1, e_2) base canonica di $\mathbb{C}^2$)

$m_g(\lambda) = 1 < m_a(\lambda) = 2 \implies J_\lambda$ <u>non diagonalizzabile</u>

J_λ è un <u>blocco di Jordan</u> 2×2 di autovalore λ.

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ su $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$

$$p_C = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(sviluppo rispetto alla 1ª riga)

$$= (1-x)(x^2-1) - 2(x-1) = -(x-1)(x^2-1+2) =$$

$$= -(x-1)(x^2+1)$$

Su $\mathbb{R}$ ha solo un autovalore 1, $m_a(1) = 1 \implies$ non diagonalizzabile

Su $\mathbb{C}$ ha autovalori $1, i, -i$ ciascuno con $m_a = 1$

$\Rightarrow m_g(1) = m_g(i) = m_g(-i) = 1 \Rightarrow$ diagonalizzabile

$\lambda = 1)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = 0$ la matrice ha rango 2

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ base di $Aut(1)$

$\lambda = i)$ $\begin{pmatrix} 1-i & 1 & -1 \\ -1 & -i & 1 \\ 1 & 1 & -i \end{pmatrix} X = 0$ rango 2 (2^a e 3^a riga lin. indip.)

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -i \\ -1 & -i & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -i \\ 0 & 1-i & 1-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x + y - iz = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = t + it \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ base di $Aut(i)$

$\lambda = -i)$ $\begin{pmatrix} 1+i & 1 & -1 \\ -1 & i & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix} X = 0$ rango 2

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ -1 & i & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 1+i & 1+i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x + y + iz = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ base di $Aut(i)$

$\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ base diagonalizzante $M_{\mathcal{V}}(L_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = D$

$$S = M^{\mathcal{E}}_{v}(id_{\mathbb{C}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1-i \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = SDS^{-1}$$

$$A^2 = SD\cancel{S^{-1}}\cancel{S}DS^{-1} = SD^2S^{-1}$$

$$A^3 = SD^3S^{-1}, \quad A^4 = SD^4S^{-1} = I_3 \quad \text{perché } D^2 = I_3 .$$

$\mathbb{Z}_2)$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad p_C = (x+1)(x^2+1) = (x+1)^3$

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x^2 + 1 \quad \text{in } \mathbb{Z}_2$$

$\lambda = 1$ unico autovalore, $m_a(1) = 3$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = 0$$

rango 2 $\Rightarrow m_g(1) = 1 < m_a(1)$

non è diagonalizzabile su $\mathbb{Z}_2$.

Forme bilineari

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Una funzione $b : V \times V \to \mathbb{K}$ è detta <u>forma bilineare su V</u> se b è lineare in ciascun argomento, ovvero se $\forall\, u \in V$ le funzioni

$$b(u,\cdot) \quad e \quad b(\cdot,u) : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

ottenute ponendo il primo (risp. secondo) argomento uguale a u e facendo variare il secondo (risp. il primo) sono lineari.

Sia ora $\dim V = n$.

Es $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$b((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1 y_2 - 3x_2 y_1$$

è bilineare perché fissando (y_1,y_2) è un polinomio omogeneo in x_1, x_2 e viceversa fissando (x_1,x_2) è un polinomio omogeneo in y_1, y_2.

Le forme bilineari su V si possono sommare e moltiplicare per scalari:

$b_1, b_2, b : V \times V \to \mathbb{K}$ forme bilineari, $\lambda \in \mathbb{K}$

$b_1 + b_2 : V \times V \to \mathbb{K}$,

$$(b_1+b_2)(v_1,v_2) \overset{def}{=} b_1(v_1,v_2) + b_2(v_1,v_2)$$

$\lambda b : V \times V \to \mathbb{K}$

$$(\lambda b)(v_1,v_2) \overset{def}{=} \lambda b(v_1,v_2) \qquad \forall\, v_1, v_2 \in V.$$

Si verifica (facilmente) che

b_1, b_2 bilineari $\Rightarrow b_1 + b_2$ bilineare

b bilineare $\Rightarrow \lambda b$ bilineare

La funzione nulla $0 : V \times V \to \mathbb{K}$

$$(v_1, v_2) \mapsto 0 \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$$

è bilineare.

OSS L'insieme delle funzioni bilineari $V \times V \to \mathbb{K}$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Sia ora $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ una base per V.
Se b è una forma bilineare su V poniamo

$$b_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} b(v_i, v_j), \quad \forall\, i,j = 1, \dots, n.$$

Def La matrice $M_{\mathcal{V}}(b) \stackrel{\text{def}}{=} (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ è detta matrice di b rispetto alla base $\mathcal{V}$.

Teorema Sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare, $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ una base per V e $B = M_{\mathcal{V}}(b) \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice di b rispetto a $\mathcal{V}$. Se

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{\mathcal{V}} \quad e \quad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}^{\mathcal{V}}$$ sono vettori di V

si ha $b(v, w) = {}^tX\, B\, Y$, $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Dim $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, $\quad w = \sum_{j=1}^n y_j v_j \Rightarrow$

$$b(v, w) = b\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j\, b(v_i, v_j) =$$

$$= \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j .$$

$${}^tX\, B\, Y = (x_1 \dots x_n)\, B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij} \right) y_j =$$

$$= \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j = b(v,w).$$

Def Una forma bilineare $b : V \times V \to \mathbb{K}$ è simmetrica se $b(v,w) = b(w,v)$ $\forall\, v,w \in V$.

Def $A \in M_n(\mathbb{K})$ è una matrice simmetrica se ${}^tA = A$ $(\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}\ \forall\, i,j = 1,\dots,n)$.

Es $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ è simmetrica, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ non lo è (su $\mathbb{R}$).

Teorema Sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare e $\mathcal{V} = (v_1,\dots,v_n)$ una base per V. Allora b è simmetrica $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{V}}(b) \in M_n(\mathbb{K})$ è una <u>matrice simmetrica</u>.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $b_{ij} = b(v_i, v_j) = b(v_j, v_i) = b_{ji}$ $\forall\, i,j$

$\Rightarrow M_{\mathcal{V}}(b)$ simmetrica.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo $B = M_{\mathcal{V}}(b)$ matrice simmetrica.

$v, w \in V$ con coordinate risp. $X, Y \in \mathbb{K}^n$.

$$b(v,w) = {}^tX\, B\, Y = \underbrace{{}^t({}^tX\, B\, Y)}_{(\text{è uno scalare})} = {}^tY\, {}^tB\, X = {}^tY\, B\, X = b(w,v)$$

$\forall\, v, w \in V \Rightarrow b$ simmetrica.