Lezione 17 dicembre 2021

venerdì 17 dicembre 2021 11:12

AVVISI:

LUNEDÌ POMERIGGIO: NO LEZIONE
20/12

MARTEDÌ MATTINA: 9-11 Simulazione
prova scritta (modalità mista)
14-17 TUTORATO

11-13 esercizi (aula E ed. C1)

MERCOLEDÌ: eventuale ricev. a distanza

GIOVEDÌ 23/12: 11-13 esercizi, mod. mista

~ . ~ . ~ . ~

ALTRO UTILIZZO DEI PRODOTTI SC.

Def.: Se $\mathbb{A}$ è uno SA su V SV euclideo (su V c'è PS g), allora $\mathbb{A}$ si dice SPAZIO AFFINE EUCLIDEO.

Nel caso $\mathbb{A} = \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ $(= \mathbb{R}^n)$, munito del PS standard, allora lo SA euclideo si indica con

$$\mathbb{E}^n_{\mathbb{R}}$$

Def.: Un RIFERIMENTO CARTESIANO in uno SA euclideo è il dato di:

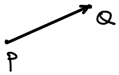
- $O \in \mathbb{A}$ un punto (ORIGINE)
- una BASE ORTONORMALE di V.

~ . ~ . ~ . ~

Ci concentriamo su $E^n_{\mathbb{R}}$

Def. Dati $P, Q \in E^n_{\mathbb{R}}$, la DISTANZA tra P e Q è:

$$d(P,Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|$$



In coordinate: Fissiamo $O \in E^n_{\mathbb{R}}$ origine, base $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$

Se $P = (p_1, \dots, p_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2 + \dots + (q_n-p_n)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (q_i - p_i)^2}$$

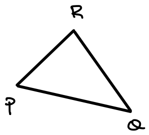
PROPRIETÀ DELLA DISTANZA:

① $d(P,Q) \geq 0$ e $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

② $d(P,Q) = d(Q,P)$

③ $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q) \quad \forall P, Q, R$

DISEG. TRIANGOLARE



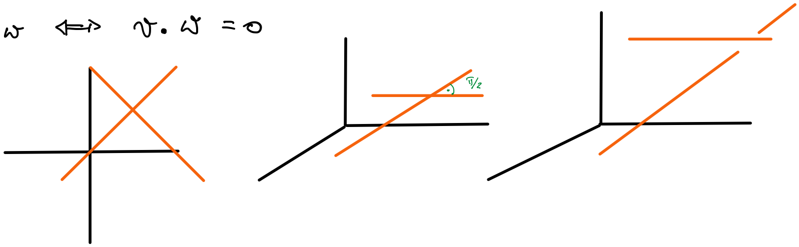
ANGOLI TRA RETTE, TRA PIANI

& RETTE - PIANI

Def.: Due rette r e r' in $E^n_{\mathbb{R}}$ con giaciture

$$W_r = \text{Span}(v), \quad W_{r'} = \text{Span}(w)$$

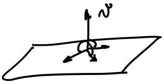
r e r' si dicono ORTOGONALI ⟺ v è ortogonale a w ⟺ $v \cdot w = 0$



Angolo di π/2 tra le giaciture delle 2 rette

DIREZIONE NORMALE (ORTOGONALE) A UN PIANO:

Def.: Un vettore v si dice ORTOGONALE a un piano $H \subseteq E^3_{\mathbb{R}}$ se v è ortogonale a ogni vettore di W_H.



OSS.: Se H ha eq. cartesiana

$$ax+by+cz=d$$

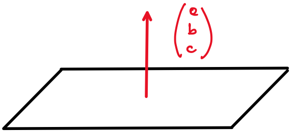
la sua giacitura: $ax+by+cz=0$ $\circledast$

vedo che: $\forall$ vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W_H$, vale

$\circledast$,

Posso riscrivere $\circledast$ in questo modo:

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = ax+by+cz=0$$



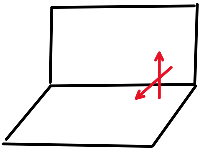
e si può verificare facilmente che in E^3_{R}, ogni vettore $\perp$ a W_H è proporzionale a $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$; infatti:

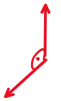
se $\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ è $\perp$ W_H $\Rightarrow$

$$\forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W_H,\quad \begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad a'\cdot x+b'y+c'z=0$$

Def :





Dati H e H' piani in E^3_{R}, essi si dicono ORTOGONALI se i vettori normali $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}(\perp H)$ e $\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}(\perp H')$ sono ORTOGONALI:

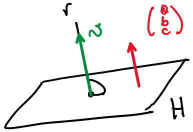
$$H: ax+by+cz=d \quad , \quad H': a'x+b'y+c'z=d'$$

$$H \perp H' \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = 0$$

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

Def.: H piano in $E^3_{\mathbb{R}}$: $ax + by + cz = d$

r retta, $W_r = \mathrm{Span}(v)$,



$r \perp H \iff v$ e $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sono proporzionali

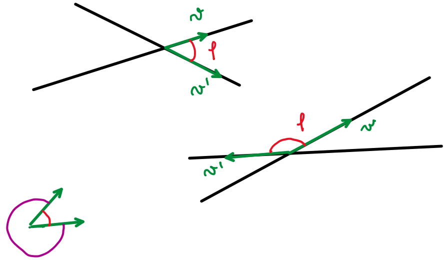
ANGOLI:

Def: r e r' in $E^3_{\mathbb{R}}$ rette, con giaciture

$W_r = \mathrm{Span}(v)$, $W_{r'} = \mathrm{Span}(v')$

(non nec. incidenti)

Sia $\varphi = \arccos \dfrac{v \cdot v'}{\|v\| \cdot \|v'\|}$



L' ANGOLO ACUTO tra r e r' è:

$$\alpha := \begin{cases} \rho & \text{se } 0 \leq \rho \leq \pi/2 = 90^\circ \\ \pi - \rho & \text{se } \pi/2 < \rho \leq \pi \end{cases}$$

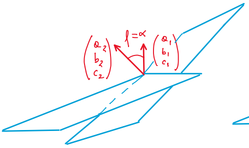
Def.: H e H' piani in $E^3_{\mathbb{R}}$, con equazioni cartesiane $ax+by+cz=d$

$a'x+b'y+c'z=d'$

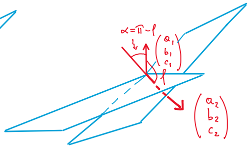
sia $\rho = \arccos \dfrac{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right\|}$

e def. ANGOLO ACUTO tra H e H':

$$\alpha = \begin{cases} \rho & \text{se } 0 \leq \rho \leq \pi/2 \\ \pi - \rho & \text{se } \pi/2 < \rho \leq \pi \end{cases}$$



$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$
$\rho = \alpha$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$



$\alpha = \pi - \rho$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$
ρ
$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$

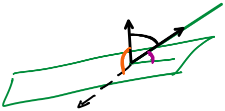
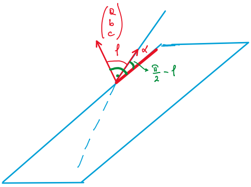
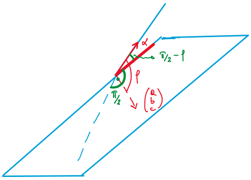
Def.: H piano con equazione cartesiana $ax+by+cz=d$

e sia r una retta affine euclidea

con giacitura $W_r = \text{Span}(v)$. Poniamo:

$$\rho = \arccos \frac{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot v}{\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| \cdot \|v\|}$$

L'ANGOLO ACUTO tra H e r è:

$$\alpha = \left| \pi/2 - \rho \right|$$