ESERCIZI DI ANALISI 2
Anno accademico 2021/2022 – Ingegneria
Prof. Alessandro Fonda

Calcolo differenziale

1. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)^\alpha & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0)\,. \end{cases}$$

Dire per quali valori di α la funzione è:
- continua
- differenziabile
- di classe C^1
- differenziabile due volte
- di classe C^2.

2. Si dimostri che la funzione

$$h(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$$

non è differenziabile in $(0,0)$.

3. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin((x^2+y^2)^\alpha) & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0)\,. \end{cases}$$

Dire per quali valori di α la funzione è:
- continua
- differenziabile
- di classe C^1
- differenziabile due volte
- di classe C^2.

4. Calcolare $H_f(x,y)$, la matrice hessiana in (x,y) della funzione

$$f(x,y) = \arctan(x^2+y)\,.$$

5. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 nel punto $(0,0)$ associato alla funzione

$$f(x,y) = (x^2+y)e^{x+y^2}\,.$$

6. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 nel punto $(0,0)$ associato alla funzione

$$f(x,y) = (x+2y+3)e^{x^2+y^2}\,.$$

Equazioni differenziali

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'' - 6x' + 9x = e^{3t}, \\ x(0) = 1\,, \quad x'(0) = 0\,. \end{cases}$$

2. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} x''' - 3x'' + 3x' - x = 24(1+t)e^{t}, \\ x(-4) = x(0) = x(1) = 0\,. \end{cases}$$

3. Risolvere il seguente problema dei due punti:

$$\begin{cases} y''(x) + 9y(x) = \sin x + \sin(3x) \\ y'\Big(-\dfrac{\pi}{2}\Big) = 0\,, \quad y'\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = 0\,. \end{cases}$$

4. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = e^{x}, \\ u(0) = u(1)\,, \quad u'(0) = 0\,. \end{cases}$$

5. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = e^{2t}, \\ x(0) = x'(0) = 0\,. \end{cases}$$

6. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = 2e^{x}, \\ u(0) = 1\,, \quad u(1) = e\,. \end{cases}$$

7. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x''''(t) - x(t) = 1, \\ x(0) = 0,\; x'(0) = 1\,,\; x''(0) = 2\,,\; x'''(0) = 3\,. \end{cases}$$

8. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) + 4u'(x) + 4u(x) = -1 \\ u(0) = 0\,, \quad u'\left(\frac{1}{2}\right) = 0\,. \end{cases}$$

9. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) + 4u(x) = 1 - 2\cos^2(x), \\ u(0) = u(2\pi)\,, \quad u'(0) = u'(2\pi)\,. \end{cases}$$

10. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x''' - x = e^{2t}, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0\,. \end{cases}$$

11. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) + \pi^2 u(x) = e^x, \\ u(0) = 0\,, \quad u(1) = 0\,. \end{cases}$$

12. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + 6y'(x) + 5y(x) = 2xe^x \\ y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

13. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) + 9u(x) = x + 1, \\ u(0) = 1\,, \quad u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Integrali e volumi

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y, z) = x\,;$$

calcolare $\int_E f$, dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + 4z^2 \leq x \leq 9\right\}.$$

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y, z) = |xy|\,;$$

calcolare $\int_E f$, dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 \leq z \leq 16\right\}.$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y, z) = x^2\,;$$

calcolare $\int_{B_1} f$, dove

$$B_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}\ .$$

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}\,;$$

calcolare $\int_E f$, dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\,,\ y \geq 0\,, x^2 + y^2 \leq 1\,,\ |z| \leq x + y\right\}.$$

5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y, z) = |xz|\,;$$

calcolare $\int_E f$, dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq y \leq 1\right\}.$$

6. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + 4y^2 \leq 1 - z \leq 1\}.$$

7. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq z^2 \leq 4x^2 + y^2 + 1 \leq 5\}.$$

8. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9x^2 + 4y^2 \leq z \leq 1\right\}\,.$$

9. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq x + y + 1\right\}\,.$$

10. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq \tfrac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)\right\}\,.$$

11. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq -1\,,\ y \geq -1\,,\ x + y \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq 1 - y^2\right\}\,.$$

12. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\,,\ y \geq 0\,, z \geq 0\,,\ x + y + z \geq \frac{1}{2}\,,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

13. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq x^2 + 1\right\}\,.$$

Integrali e parametrizzazioni

1. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = z^2 \leq 1\,,\ x-2 \leq y \leq x+2\right\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi $\int_\sigma f$, dove $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da

$$f(x,y,z) = \sqrt{1+2z^2}\,.$$

2. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ 1 \leq z = \sqrt{4x^2+y^2} \leq 2\right\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi $\int_\sigma f$, dove $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da

$$f(x,y,z) = xy\,.$$

3. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = 1\,,\ -1 \leq x = -z^2\right\},$$

dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$. Sia inoltre

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 7x\}$$

il dominio della funzione $g : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x,y,z) = \sqrt{y-7x}\,.$$

Calcolare l'integrale $\int_\sigma g$.

4. Trovare una parametrizzazione $\sigma : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-z = y^2-1\,,\ |x-z| \leq 1\,,\ |x+z| \leq 2\right\}.$$

Calcolare quindi l'area di tale superficie.

5. Trovare una parametrizzazione $\sigma : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x = y^2+z^2 \leq 9\right\}.$$

Calcolare quindi l'area di tale superficie.

6. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq x = 1-(y^2+z^2)\right\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'area di tale superficie.

7. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x+1\,, x^2+2x = 3-y^2-z^2\right\},$$

dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$. Calcolare quindi la lunghezza di tale curva.

8. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 4x^2+4z^2 \leq 1\right\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'area di tale superficie.

9. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2+z^2 \leq 9\right\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'area di tale superficie.

10. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = |x+y|+1 \leq 2\,,\ |y| \leq 1\right\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'area di tale superficie.

11. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1\,,\ x^2+y^2+z^2 = 1\right\},$$

dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$. Calcolare quindi la lunghezza di tale curva.

12. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4}+y^2 = 1\,, |z| \leq 1\right\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi il flusso $\int_\sigma F \cdot dS$, dove $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è il campo di vettori

$$F(x,y,z) = (2x, 2y, z)\,.$$

13. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+4z^2 = 1\,, x \geq 0\,, y \geq 0\,, z \geq 0\right\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi il flusso $\int_\sigma F \cdot dS$, dove $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è il campo di vettori costante

$$F(x,y,z) = (1,1,0)\,.$$

Integrali di forme differenziali

1. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$ definita da

$$\omega(x,y) = 3x^2 y\, dx + x^3 dy\,.$$

Calcolare $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è la curva definita da

$$\sigma(t) = (-t^2, t)\,.$$

2. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = (2x + 4y + 5z)\, dx + (4x + 4y + 6z)\, dy + (5x + 6y + 6z)\, dz\,.$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t^2, -3t, t^2)\,.$$

3. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{aligned}\omega(x,y,z) = {} & (2x(y+z) + 3x^2 + y^2 + z^2)\, dx + \\ & +(2y(x+z) + x^2 + 3y^2 + z^2)\, dy + \\ & +(2z(x+y) + x^2 + y^2 + 3z^2)\, dz\,.\end{aligned}$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t, t^2, -t)\,.$$

4. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = (3x^2 y + z^3)\, dx + (3y^2 z + x^3)\, dy + (3z^2 x + y^3)\, dz\,.$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t, -t^2, 2t^2)\,.$$

5. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = \sin(xyz)\Big(yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz\Big)\,.$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva definita da

$$\gamma(t) = (2t, \pi t, t^2)\,.$$

6. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = y^2 z(3x^2 + z^2)\, dx + 2xyz(x^2 + z^2)\, dy + xy^2(x^2 + 3z^2)\, dz\,.$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t, t^2, -t)\,.$$

7. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = 3x^2y\,dx - 6xy^2\,dy + 6xyz\,dz\,.$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t, -t^2, 2t^2)\,.$$

8. Sia ω la 2-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = x\; dy \wedge dz - 2y\; dz \wedge dx + z\; dx \wedge dy\,.$$

Calcolare $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la supreficie definita da

$$\sigma(u,v) = (u, u+v, v)\,.$$

9. Sia ω la 2-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = xy\; dy \wedge dz + xz\; dz \wedge dx - yz\; dx \wedge dy\,.$$

Calcolare $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la supreficie definita da

$$\sigma(u,v) = (u+v, u+v, u-v)\,.$$

10. Sia ω la 2-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x_1,x_2,x_3) = x_2x_3\,dx_2 \wedge dx_3 + x_3x_1\,dx_3 \wedge dx_1 + x_1x_2\,dx_1 \wedge dx_2\,.$$

Calcolare $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [-2,2] \times [1,3] \to \mathbb{R}^3$ è la superficie definita da

$$\sigma(u,v) = (u^2, u+v, v^2)\,.$$

11. Sia ω la 2-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2x_3\,dx_2 \wedge dx_3 - (x_1+x_3)x_2^2\,dx_3 \wedge dx_1 + 2x_1x_2x_3\,dx_1 \wedge dx_2\,.$$

Calcolare $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [1,2] \times [-1,0] \to \mathbb{R}^3$ è la superficie definita da

$$\sigma(u,v) = (v, uv, u)\,.$$