

# Geometria 1

## Foglio di esercizi 9

Anno accademico 2021-2022

17/12/2021

- 1) Considerare le matrici

$$A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & x^2 & 1 \\ 0 & -2x & 3 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 3-x & 1 & -1 \\ 2 & x-1 & 0 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

e studiarne il rango al variare di  $x \in \mathbb{R}$ . Successivamente se ne studi il rango nei campi  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_3$ ,  $\mathbb{Z}_5$ . Calcolarne anche il determinante in tutti i campi considerati.

- 2) Si considerino i vettori  $v_1 = (2, 0, -1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 3, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ . Completarli ad una base di  $\mathbb{R}^4$  tale che la matrice avente tali vettori come colonne abbia determinante 1.
- 3) Diagonalizzare, se possibile, le seguenti matrici nei campi  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_5$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 4) Calcolare gli autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche delle matrici reali

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -5 \\ -4 & 4 & -2 \\ 10 & -3 & 8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- 5) Sia  $A \in M_2(\mathbb{R})$  una matrice simmetrica, cioè  ${}^tA = A$ . Dimostrare che gli autovalori di  $A$  sono reali.
- 6) Dire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -4 & -7 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z}_2$  e  $\mathbb{Z}_3$ . In caso affermativo trovare, nei vari casi, una matrice diagonale  $D$  e una matrice invertibile  $S$  tali che  $A = S^{-1}DS$ .