Esercizio 1. *Calcolare l'integrale curvilineo*

$$\int_\gamma \sqrt{z}\, ds$$

ove

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2) \qquad t \in [0, \pi].$$

Soluzione.

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

Pertanto

$$\int_\gamma \sqrt{z} ds = \int_0^\pi t\sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \frac{1}{12}\left[(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^\pi = \frac{1}{12}\left[(1 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale curvilineo*

$$\int_\gamma x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, ds$$

ove

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t) \qquad t \in [0, \pi].$$

Soluzione. Calcoliamo $\gamma'(t)$ e poi la sua norma.

$$\gamma'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = e^t \sqrt{\cos^2 t - 2\sin t \cos t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{3}e^t$$

Pertanto

$$I = \int_\gamma x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ds = \int_0^\pi \sqrt{6}e^t e^t \cos t \cdot e^t\, dt = \int_0^\pi \sqrt{6}e^{3t} \cos t\, dt =$$

Calcoliamo l'integrale indefinito associato per parti trovando:

$$\int e^{3t} \cos(t)\, dt = e^{3t} \sin t - 3\int e^{3t} \sin(t)\, dt = e^{3t} \sin t + 3e^{3t} \cos t - 9\int e^{3t} \cos t$$

da cui:

$$\int e^{3t} \cos t\, dt = \frac{e^{3t}}{10}(\sin t + 3\cos t) + c$$

e quindi:

$$I = \sqrt{6}\left[\frac{e^{3t}}{10}(\sin t + 3\cos t)\right]_0^\pi = \frac{\sqrt{6}}{10}(e^{3\pi} + 1) = -\frac{3\sqrt{6}}{10}(e^{3\pi} + 1)$$

Esercizio 3. *Calcolare*

$$\iint_S y^2 \ln z\, d\sigma$$

ove $S \subset \mathbb{R}^3$ *è la superficie cilindrica di equazione* $x^2 + y^2 = 1$ *compresa tra i piani* $z = 1$ *e* $z = 2$.

Soluzione. Una parametrizzazione di S è data da:

$$\Pi(t,h) = \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = h \end{cases} \qquad (t,h) \in [0,2\pi) \times [1,2].$$

Si ha:

$$\Pi_t = (-\sin t, \cos t, 0) \qquad \Pi_h = (0,0,1)$$

da cui:

$$\|\Pi_t \times \Pi_h\| = \left\| \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \|(\cos t, \sin t, 0)\| = 1$$

Dunque:

$$\iint_S y^2 \ln z d\sigma = \iint_D \sin^2 t \ln h \, dtdh = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt \cdot \int_1^2 \ln h \, dh = \pi(2\ln 2 - 1)$$

ove si è utilizzato il fatto che:

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t \Leftrightarrow \sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

Esercizio 4. *Calcolare l'area di*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \le 1\right\}$$

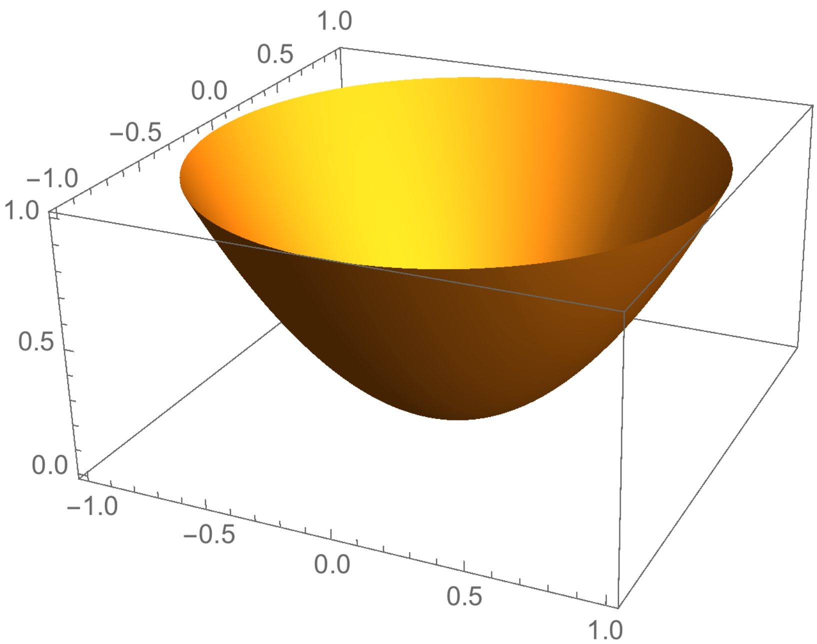

Figura 1: L'insieme Σ.

Soluzione. Una parametrizzazione di Σ è data da:

$$\Pi(u,v) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \qquad (u,v) \in \overline{B}(0,1) = B$$

Si ha:

$$\Pi_u = (1,0,2u) \qquad \Pi_v = (0,1,2v)$$

da cui:

$$\|\Pi_u \times \Pi_v\| = \left\| \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \right\| = \|(-2u,-2v,1)\| = \sqrt{1+4u^2+4v^2}$$

Dunque:

$$A = \iint_S 1\, d\sigma = \iint_B \sqrt{1+4u^2+4v^2}\, dudv$$

Passando a coordinate polari

$$\begin{cases} u = \rho\cos\alpha \\ v = \rho\sin\alpha \end{cases}$$

la cui matrice Jacobiana associata è data da:

$$J(\alpha,\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \rho} & \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} & \frac{\partial v}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\rho\sin\alpha \\ \sin\alpha & \rho\cos\alpha \end{pmatrix}$$

e il cui determinante è ρ. Inoltre tale trasformazione manda l'insieme B in

$$C = \{(\rho,\alpha) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \alpha < 2\pi\}$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho\sqrt{1+4\rho^2} d\rho d\alpha = \frac{\pi}{6}[(4\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{\pi}{6}[5\sqrt{5}-1]$$

Esercizio 5. *Calcolare l'area di*

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2, z \geq 1\right\}$$

Soluzione. Una parametrizzazione di Σ è data da:

$$\Pi(u,v) = \begin{cases} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\sin\alpha \\ z = \sqrt{2-\rho^2} \end{cases} \qquad (\rho,\alpha) \in [0,1] \times [0,2\pi] = R$$

Si ha:

$$\Pi_\rho = \left(\cos\alpha, \sin\alpha, -\frac{\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}\right) \qquad \Pi_\alpha = (-\rho\sin\alpha, \rho\cos\alpha, 0)$$

da cui:

$$\|\Pi_\rho \times \Pi_\alpha\| = \left\| \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & -\frac{\rho}{\sqrt{2-\rho^2}} \\ -\rho\sin\alpha & \rho\cos\alpha & 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \left(\frac{\rho^2\cos\alpha}{\sqrt{2-\rho^2}}, \frac{\rho^2\sin\alpha}{\sqrt{2-\rho^2}}, \rho \right) \right\| = \frac{\sqrt{2}\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}$$

Dunque:

$$A = \iint_S 1\, d\sigma = \iint_R \frac{\sqrt{2}\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}\, d\rho d\alpha = 2\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{2}\rho}{\sqrt{2-\rho^2}} d\rho = 2\sqrt{2}\pi \left[-\sqrt{2-\rho^2}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi.$$

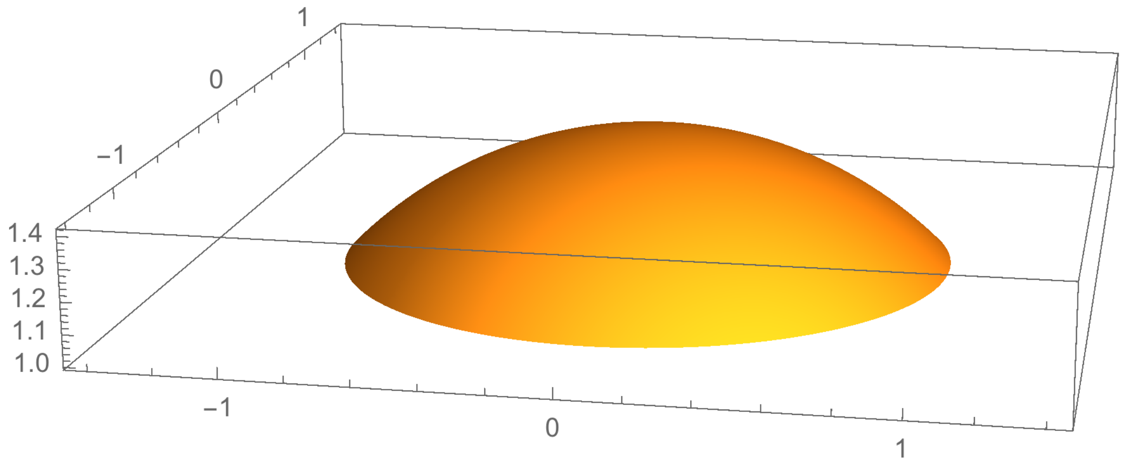

Figura 2: L'insieme C.