LOGICA

Lezioni 8: Logica dei Predicati

Laura Nenzi

DIA – Università degli Studi di Trieste

Contenuti della lezione

- Logica dei predicati o del primo ordine:
  - Sintassi
  - Semantica

Calcolo Proposizionale

- È poco espressivo.
- Non è possibile gestire la nozione di *generalità*.
- Esempi:
  - P è vera per tutti gli oggetti di un dominio
  - Esiste almeno un oggetto che gode della proprietà P.

  - Ogni numero intero è razionale (A)
  - 1 è un numero intero (B)
  - 1 è un numero razionale (C)
  - $A \wedge B \rightarrow C$?

Logica dei Predicati

- **Termini:** oggetti del dominio. Possono essere:
  - Costanti. Es: 5.
  - Variabili. Es: x.
- **Predicati**: esprimono proprietà e relazioni su insiemi di oggetti del dominio.
  - Es: 5 è un numero intero.
- **Funzioni**: permettono di definire nuovi oggetti in termini di quelli presenti. Es: $x + 1$
- **Quantificatori**: esistenziale ($\exists$) e universale ($\forall$).

Quantificatori

- Quantificatore ***universale*** ∀: permette di considere la generalità degli oggetti del dominio inteso del discorso
  - Tutti i numeri interi sono razionali

- Quantificatore ***esistenziale*** ∃: consente di esprimere l’esistenza di oggetti in una data relazione
  - Esiste un razionale che non è un intero,

Sintassi

Alfabeto

Un linguaggio del primo ordine è definito da un alfabeto composto da:

- Un insieme di simboli di **costante** $a, b, c, \ldots$
- Un insieme (VAR) di simboli di **variabile** $x, y, z,\ldots$
- Un insieme di simboli di **funzioni** $f, g, h,\ldots$
- Un insieme di simboli di **predicato** $A, B, C, \ldots$
- **Connettivi**: $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$
- **Quantificatori**: $\forall$, $\exists$
- Simboli ausiliari: "(" , ")"

Alfabeto

- Insieme finito di predicati e funzioni
- Infinite variabili
- Cardinalità arbitraria di costanti
- L'alfabeto deve essere fissato

- OSS: Ogni alfabeto definisce un linguaggio differente!!!

Formalizzazione

- “x e` un numero pari” : $\boldsymbol{A(x)}$
  - dove A =“… è un numero pari”
- “$x+1$ è un numero pari” : $\boldsymbol{A(f(x,1))}$
  - dove $f^2(x,y) = x + y$ è una funzione binaria
- “$x+1$ è un numero pari e 2 è un intero”: $A(f^2(x,1)) \land B(2)$
- “x +1 è maggiore di x”: $C^2(f^2(x,1),x)$
  - dove C^2=“… maggiore di …” è un predicato binario

Insiemi dei termini TER

- TER è il minimo insieme X t.c.:
  - Ogni costante appartiene a X.
  - Ogni variabile appartiene a X.
  - Se $t_1, t_2, \dots, t_n \in X$ e f^n è un simbolo di funzione del linguaggio, allora: •
    - $f^n(t_1, t_2, \dots, t_n) \in X$.

- OSS: È possibile considerare le costanti come funzioni di arietà 0, f^0

Formule Ben Formate

- L'insieme **FBF** contenente le fbf è il minimo insieme t.c.:
  1. $\perp$ è una fbf,
  2. Se $t_1, t_2, \ldots, t_n, \in TER$ e A^n è un simbolo di predicato *n*-ario, allora:
     - $A^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ è una fbf.
  3. se P è una fbf anche $(\neg P)$ è una fbf,
  4. Se P e Q sono fbf anche $(P \wedge Q), (P \vee Q), (P \rightarrow$ Q), sono fbf,
  5. se P è una f.b.f. anche $((\forall x)P)$ *e* $((\exists x)P)$ sono fbf

- **Formule Atomiche** o atomi: $\perp, A^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$
- Precedenza tra i connettivi: $\forall = \exists = \neg > \wedge > \vee > \rightarrow$

Esempi

- Ogni numero naturale è un intero
  - $\forall x\ (A(x) \rightarrow\ B(x))$
- Esiste un numero che non è naturale
  - $\exists x\ \neg A(x)$
- Per ogni intero x esiste un numero y tale che $x < y$
  - $\forall x \exists y\ C(x, y)$

Sottoformule

- Sia P una fbf le **sottoformule di** P, $\boldsymbol{Stfm(P)}$**,** sono così definite:
- se P è ⊥ o $A^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$
  - $Stfm(P) \ = \ \{P\}$.
- se P è $\neg Q,$
  - $Stfm(P) = \{P\} \cup Stfm(Q),$
- se P è $P1 \wedge P2, P1 \vee P2 \ o \ P1 \rightarrow P2,$
  - $Stfm(P) = \{P\} \cup Stfm(P1) \cup Stfm(P2).$
- se P è $(\forall xQ)$ o $(\exists xQ)$
  - $Stfm(P) = \{P\} \cup Stfm(Q)$

Esempio

- $P = \forall x \left(A(x) \rightarrow B(x)\right) \wedge \exists x \neg A\left(f(x,y)\right)$
- Sottoformule:
  - P
  - $\forall x \left(A(x) \rightarrow B(x)\right)$
  - $\exists x \neg A(f(x,y))$
  - $A(x) \rightarrow B(x)$
  - $A(x)$
  - $B(x)$
  - $\neg A(f(x,y))$
  - $A(f(x,y))$

Induzione Strutturale TER

- **Induzione strutturale sui termini:**
- Sia $\wp$ una proprietà allora $\wp(t)$ è verificata per ogni termine $t \in TER$ se:
  - $\mathbb{P}$ è verificata per tutti i simboli di variabile e costante.
  - $\forall\ t_1, t_2, \dots, t_n \in TER$ allora per ogni f:
    se $\wp(t_1), \wp(t_2), \dots, \wp(t_n) \Rightarrow \wp(f(t_1, t_2, \dots, t_n))$.

Induzione Strutturale

- Sia $\wp$ una proprietà allora $\wp(t)$
  - $\wp$ vale per tutti i predicati, per $\bot$.
  - Se valgono $\wp(P)$ e $\wp(Q)$, allora si può dimostrare che vale anche $\wp(P \vee Q), \wp(P \wedge Q), \wp(P \rightarrow Q)$
  - Se vale $\wp(P)$, allora si può dimostrare che vale anche $\wp\big((\forall x)P\big), \wp((\exists x)P)$

Campo d'azione (scope)

- Il **campo d'azione** di un quantificatore:
  - è la fbf immediatamente alla sua destra,
  - ovvero è l'espressione su cui il quantificatore ha effetto.
- Una variabile che è nel campo di azione di un quantificatore è detta **legata**, altrimenti **libera**.
  - $\exists x \neg A(f(x, y))$
  - x è legata e y è libera.

Variabili libere TER

- Sia $t \in TER$: l'insieme $FV(t)$ delle variabili libere in t è così definito:
- $FV(x) = \{x\}, x$ variabile
- $FV(a) = \{\}, a$ costante
- $FV(f(t_1, t_2, \dots, t_n)) = FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_n)$ con f funzione n-aria.

Variabili libere

- Per ogni fbf P l'insieme $FV(P)$ delle variabili libere di P è così definito:
- $FV(\bot) = \emptyset$,
- $FV(A(t_1, t_2, \dots, t_n)) = FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_n)$
- $FV(\neg P) = FV(P)$
- $FV(P1 \wedge P2) = FV(P1 \vee P2) = FV(P1 \rightarrow P2) = FV(P1) \cup FV(P2)$
- $FV(\forall x P) = FV(\exists x P) = FV(P) - \{x\}$

Formule Chiuse

- Una fbf P è **chiusa** se $FV(P) = \emptyset$, **aperta** altrimenti.
- $\boldsymbol{BV(P)}$ sono le variabili legate di P.
- Esempio P = $\forall x(Q(x,y) \rightarrow R(x)) \land \forall y(\neg Q(f(x,y)) \rightarrow \exists z R(z))$
  - $FV(P) = \{x, y\},\ BV(P) = \{x, y, z\}$
- x è sia libera che legata, ma ogni occorrenza di x deve essere esclusivamente libera o legata

Errori comuni

- È importante posizionare correttamente i quantificatori nella formula!

- Esempio:
  - Per ogni naturale x esiste un numero y t.c. **se** x non è il successore di y allora $x = 0$
    - $P = \forall x\, \exists y(\neg E(x, succ(y)) \to E(x, 0))$ è vera
  - Per ogni naturale x **se** esiste un numero y t.c. x non è il successore di y allora $x = 0$
    - $Q = \forall x\, (\exists y \neg E(x, succ(y)) \to E(x, 0))$ è falsa
      - per esempio se $x = 1$

Errori comuni

- $\forall x\ \exists y\ A(x, y)$ è diverso da $\exists x\ \forall y\ A(x, y)$

- Esempio: $A(x, y)\ =\ x < y$
  - x e y numeri naturali
  - $\forall x\ \exists y\ A(x, y)$ vera
  - $\exists y\ \forall x\ A(x, y)$ falsa

Ridenominazione

- I nomi di variabili quantificate ($\forall x, \exists x$) hanno il ruolo di **parametri formali**.
- In $\forall x P$ e $\exists x P$ possiamo **cambiare x in y** senza modificarne il significato.
- IMP:Il nuovo nome y **non** deve comparire nella formula P.
- Es: $\forall x(Q(x,z) \rightarrow S(x) \ \wedge \ \exists x \ R(x))$
- Cambio $\forall x$ con $\forall y$ e le x legate al $\forall x$ con delle y
  - $\forall y(Q(y,z) \rightarrow S(y) \ \wedge \ \exists x \ R(x))$
  - Le due formule sono equivalenti

Sostituzioni TER

- Siano $s, t \in TER$ allora il termine $s[t/x]$, ottenuto rimpiazzando le occorenze di x in s con t, è così definito:
  - Se s è la variabile x allora $s[t/x] = x[t/x] = t$
  - Se s è una variabile $y \neq x$ allora $y[t/x] = y$
  - Se s è una costante c allora $c[t/x] = c$
  - $f(t_1, \dots, t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$

Sostituzione

- Siano P una fbf e t ∈ TER allora $P[t/x]$ è così definito:
- $\perp [t/x] = \perp$
- $A(t_1, \dots, t_n)[t/x] \; = \; A(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$
- $(\neg P)[t/x] \; = \neg P[t/x]$
- $(P1 \; \wedge \; P2)[t/x] \; = \; P1[t/x] \; \wedge \; P2[t/x]$
- $(P1 \; \vee \; P)[t/x] \; = \; P1[t/x] \; \vee \; P2[t/x]$
- $(P1 \rightarrow \; P2)[t/x] \; = \; P1[t/x] \rightarrow P2[t/x]$

Sostituzione $\forall yP$

- $Se\ x \neq y\ e\ y \notin FV(t)\ allora$
  - $(\forall yP)[t/x] \;=\; \forall y(P[t/x])$
- $Se\ x \neq y\ e\ y \in FV(t)\ e\ z\ non\ occorre\ in\ P\ e\ t\ allora$:
  - $(\forall yP)[t/x] \;=\; \forall z(P[z/y][t/x])$
- $Se\ x = y\ allora$
  - $(\forall yP)[t/x] \;=\; \forall y\ P$

Sostituzione $\exists y P$

- $Se\ x \neq y\ e\ y \notin FV(t)\ allora$
  - $(\exists yP)[t/x] \;=\; \exists y(P[t/x])$
- $Se\ x \neq y\ e\ y \in FV(t) e\ z\ non\ occorre\ in\ P\ e\ t\ allora$:
  - $(\exists yP)[t/x] \;=\; \exists z(P[z/y][t/x])$
- $Se\ x = y\ allora$
  - $(\exists yP)[t/x] \;=\; \exists y\ P$

Osservazione

- La sostituzione si applica solo alle variabili libere!

- Esempio:
- $P \;=\; \forall y(Q(x,y) \rightarrow \; S(x) \;\wedge\; \exists x\, R(x))$
- $P[f(y)/x] \;= \forall z(Q(f(y),z) \rightarrow S(f(y)) \wedge \exists x\, R(x))$

Semantica

Struttura

- Una **struttura** è una coppia $S = (D_S, I_S)$ dove D_S è un insieme non vuoto detto *dominio* e I_S è un assegnamento che associa:
  - Ad ogni costante un elemento $I_S(c) \in D$
  - Ad ogni funzione f^k di arità $k > 0$ una funzione:
    - $I_S(f^k)\colon\ D^k \ \rightarrow D$
  - Ad ogni predicato B^k di arità $k > 0$ una funzione:
    - $I_S(B^k)\colon\ D^k \ \rightarrow \{0, 1\}$

Notazione

- $c^S = I_S(c)$
- $f^S = I_S(f)$
- $B^S = I_S(B)$

- Osservazione:
  - Non si può interpretare una fbf contenente variabili libere.
  - Si assegnano ad esse degli elementi di D.
  - Il valore di verità di una fbf dipende dall'assegnamento delle variabili libere.

Ambiente

- Un **ambiente** per S è la funzione
  - $\xi^S : VAR \rightarrow D$
- L'insieme di tutti i possibili ambienti è
  - $ENV_s = \{\xi^S \mid \xi^S : VAR \rightarrow D\}$
- Siano $d \in D$ e $x \in VAR, \xi^S[d/x]$ è l'ambiente così definito:
  - $se\ y \neq x\ allora\ \xi^S[d/x](y) = \xi^S(y)$
  - $se\ y = x\ allora\ \xi^S[d/x](y) = d$
- Esempio: $\xi^S(x) = 0, \xi^S(y) = 2, \xi^S(z) = 0$

$$\xi^S[2/z](x) = 0, \xi^S[2/z](y) = 2, \boldsymbol{\xi^S[2/z](z) = 2}$$

Semantica

- Un'**interpretazione** di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è una coppia (S, ξ^S), con S struttura e ξ^S ambiente per S.
- L'interpretazione ci consente di dare un significato alle formule ben formate.

Esempio

- $P = \forall x\, A\big(x, f(x)\big) \vee B\big(g(c,y)\big), \quad y \in FV(P),\ x \in BV(P)$
- Un'interpretazione (S, ξ^S) ristretta a P è:
  - $D_S = \{0,1,\ldots.\} = \mathbb{N}$ (naturali)
  - $A^s = \{(m,n) | n, m \in D_S \text{ e } m > n\}$ (predicato binario)
  - $B^s = \{n \in D_S | n \text{ è primo}\}$ (predicato unario)
  - $f^s(n) = n + 1$ (funzione unaria)
  - $g^s(m,n) = m + n$ (funzione binaria)
  - $c^s = 2$
  - $\xi^S(y) = 1$
- In questa interpretazione il significato di P è:
  - "per ogni naturale $x, x > x + 1$ oppure $2 + 1$ è primo"

Esempio

- $P \ = \ \forall x\, A\big(x, f(x)\big) \vee \ B\big(g(c,y)\big), \quad y \in FV(P), \ x \in BV(P)$
- Un'interpretazione (S, ξ^S) ristretta a P è:
  - $D_S \ = \ \{0,1, \ldots.\} = \mathbb{N}$ (naturali)
  - $A^s = \{(m,n) | n, m \in D_S \text{ e } m > n\}$ (predicato binario)
  - $B^s = \{n \in D_S | \boldsymbol{n = 0}\}$ (predicato unario)
  - $f^s(n) \ = \ n + 1$ (funzione unaria)
  - $g^s(m,n) \ = \ m + n$ (funzione binaria)
  - $c^s \ = \ 2$
  - $\xi^S(y) \ = \ 1$
- In questa interpretazione il significato di P è:
  - "per ogni naturale $x, x > x + 1$ oppure $2 + 1$ =0"

Interpretazione: valore TER

- Sia P una fbf e (S, ξ^S) un'interpretazione. Per ogni termine t in P il suo valore in (S, ξ^S) è denotato dalla funzione $[\![\quad]\!]_{S,\xi} : TER \rightarrow D$:
- se t è una variabile x allora $[\![t]\!]_{S,\xi} = \xi(x)$
- se t è una costante c allora $[\![t]\!]_{S,\xi} = c^S$
- se t è la funzione $f(t_1, \dots, t_n)$ allora
$$[\![t]\!]_{S,\xi} = f^S([\![t_1]\!]_{S,\xi}, \dots, [\![t_n]\!]_{S,\xi})$$

Esempio

- Sia l'interpretazione (S, ξ^S):
  - $D = \{0,1, \ldots.\}$ (naturali)
  - $f^S(n) = n + 1$
  - $g^S(m, n) = m + n$
  - $c^S = 2$
  - $\xi^S(y) = 1$
- In questa interpretazione:
  - $[\![g(c, f(y))]\!]_{S,\xi} = (2 + (1 + 1))$

Funzione di valutazione

- Sia P una fbf e (S, ξ) un'interpretazione. La funzione di valutazione $v^{(S,\xi)}$: $FBF \ \rightarrow \ \{0,1\}$:
- $v^{(S,\xi)}(\perp) = 0$
- $v^{(S,\xi)}A(t_1, \dots, t_n)) \ = A^S([\![t_1]\!]_{S,\xi}, \dots, [\![t_n]\!]_{S,\xi})$
- $v^{(S,\xi)}(\neg P) = 1 - v^{(S,\xi)}(P)$
- $v^{(S,\xi)}(P \ \wedge Q) = \min(v^{(S,\xi)}(P), v^{(S,\xi)}(Q) \ )$
- $v^{(S,\xi)}(P \ \vee Q) = \max(v^{(S,\xi)}(P), v^{(S,\xi)}(Q) \ )$
- $v^{(S,\xi)}(P \rightarrow Q) = \max(1 - v^{(S,\xi)}(P), v^{(S,\xi)}(Q) \ )$
- $v^{(S,\xi)}(\forall x P) = \min\{v^{(S,\xi[a/x])}(P) \mid a \in D\}$
- $\mathrm{v}(\exists x P) = \max\{v^{(S,\xi[a/x])}(P) \mid a \in D\}$

Osservazione

- Il quantificatore universale può essere visto come una congiunzione iterata
- Il quantificatore esistenziale può essere visto come una disgiunzione iterata
- Non è in genere possibile determinare il valore di verità di una fbf in un'interpretazione (S, ξ^S), in quanto D è in genere infinito.

Proprietà

- Il valore di verità di una fbf P data un'interpretazione (S, ξ^S) dipende
  - dalla restrizione di ξ^S all'insieme delle variabili libere in P.
- Ovvero: non c'è bisogno di considerare i valori delle altre variabili nell'ambiente.