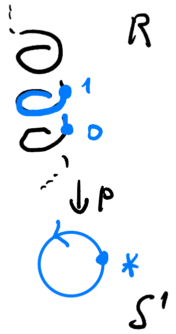
Teorema $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.



Dim $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$, $* = (1,0) \in S^1$

$\varphi : \pi_1(S^1, *) \to \mathbb{Z}$, $\varphi([\omega]) \overset{def}{=} \tilde{\omega}(1) \in \mathbb{Z}$

dove $\tilde{\omega}$ è il sollevamento di ω t.c. $\tilde{\omega}(0) = 0$

(ben definita per i teoremi di sollevamento e $p^{-1}(*) = \mathbb{Z}$).

$\psi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1)$, $\psi(n) = [p \circ \lambda_n]$, $\lambda_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\lambda_n(t) := nt$.

$\varphi \circ \psi = id_{\mathbb{Z}}$ (ovvio perché λ_n è sollevamento di $p \circ \lambda_n$)

Mostriamo che $\psi \circ \varphi = id_{\pi_1(S^1, *)}$

$[\omega] \in \pi_1(S^1, *) \rightsquigarrow \varphi([\omega]) = \tilde{\omega}(1) \in \mathbb{Z}$, $\tilde{\omega}(0) = 0$

$\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $\tilde{H}(t,s) = (1-s)\,\tilde{\omega}(t) + s\,\lambda_{\tilde{\omega}(1)}(t)$

omotopia rel $\{0,1\} \rightsquigarrow H := p \circ \tilde{H}$ omotopia rel $\{0,1\}$

tra ω e $p \circ \lambda_{\tilde{\omega}(1)} \Rightarrow [\omega] = \psi([\lambda_{\tilde{\omega}(1)}]) = \psi(\varphi([\omega]))$.

Quindi $\psi \circ \varphi = id_{\pi_1(S^1, *)}$.

Resta da far vedere che ψ è un omomorfismo

(quindi un isomorfismo).

$\lambda_{m,n} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\lambda_{m,n}(t) = m + nt$

$\lambda_{m+n} \simeq_{\{0,1\}} \underbrace{\lambda_m \cdot \lambda_{m,n}}_{\text{concatenazione}}$ (omotopia: combinazione convessa)

$\psi(m+n) = [p \circ \lambda_m][p \circ \lambda_{m,n}] = \psi(m)\,\psi(n)$

perché $p \circ \lambda_{m,n} = p \circ \lambda_n$ dato che p è periodica.

Teorema Siano $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ punti base. Allora

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Dim $p_1 : X \times Y \to X$, $p_2 : X \times Y \to Y$ proiezioni canoniche

$$\varphi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

$$\varphi([\omega]) = (p_{1*}([\omega]), \ p_{2*}([\omega])) \quad \text{omomorfismo.}$$

$$\Omega(X \times Y, (x_0, y_0)) \ni \omega : [0,1] \longrightarrow X \times Y \rightsquigarrow \omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))$$

$$\omega_1 \in \Omega(X, x_0), \quad \omega_2 \in \Omega(Y, y_0)$$

$$\varphi([\omega]) = ([\omega_1], [\omega_2]). \qquad \omega = (\omega_1, \omega_2)$$

$$\psi : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$$

$$\psi([\omega_1], [\omega_2]) = [(\omega_1, \omega_2)] \quad \text{ben definita}$$

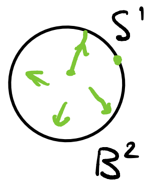
$$\varphi \circ \psi = id, \quad \psi \circ \varphi = id \qquad \boxed{E}$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ e } \psi = \varphi^{-1} \text{ isomorfismi.}$$

Corollario $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$.

Teorema di non retrazione Non esiste una retrazione continua $r : B^n \to S^{n-1}$!

Dim Solo per $n = 2$. Per assurdo, sia $r : B^2 \to S^1$ una retrazione, $i : S^1 \hookrightarrow B^2$ inclusione



$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{Z} & & 0 & & \mathbb{Z} \\ & & \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \end{array}$$

$$\underbrace{S^1 \overset{i}{\hookrightarrow} B^2 \xrightarrow{r} S^1}_{id_{S^1}} \rightsquigarrow \underbrace{\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} B^2 \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1)}_{}$$

contraddizione $\longrightarrow id = 0$

($n = 1$ ovvio)

Teorema del punto fisso di Brouwer

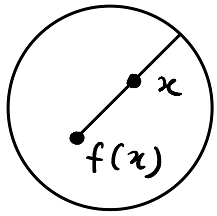
Sia $f : B^n \to B^n$ continua. Allora f ammette almeno un punto fisso, cioè $\exists\, u \in B^n$ t.c. $f(u) = u$.

Dim Solo per $n = 1, 2$

$n=1$: Considerare $g : [-1,1] \to [-1,1] = B^1$, $g(x) = f(x) - x$ e usare il teorema dei valori intermedi. $\boxed{E}$

$n=2$: per assurdo supponiamo $f(x) \neq x \;\; \forall\, x \in B^2$

$r : B^2 \to S^1$, $r(x) = \ell(f(x), x) \cap S^1$



dove $\ell(a,b)$ è la semiretta aperta per a e b e origine in a.

$\ell(a,b) = \{ a + t(b-a) \mid t > 0 \}$, $a \neq b$.

Con un calcolo diretto si verifica che r è continua e $r(x) = x \;\; \forall\, x \in S^1 \Rightarrow r$ retrazione, contraddizione.

$\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$ abeliano $\Rightarrow$ l'identificazione con $\mathbb{Z}$ non dipende dal punto base.

OSS $\forall\, \alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ omomorfismo $\exists!\, a \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$\alpha(n) = a\,n \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \qquad \boxed{E}$$

Def Sia $f : S^1 \to S^1$ continua. Definiamo il grado di f come il numero $\deg f \in \mathbb{Z}$ t.c.

$f_* : \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_1(S^1)$ è la funzione

$$f_*([\omega]) = \deg f \cdot [\omega] \quad \text{(notazione additiva)}$$

Lemma

Se $[\omega_1] \cong 1$ generatore di $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$$\deg f = (\varphi \circ f_*)([\omega_1])$$

dove $\varphi : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$ è l'isomorfismo definito sopra.

Dim $\varphi(f_*([\omega_1])) = \deg f \; \varphi([\omega_1]) = \deg f \cdot 1 = \deg f$

Es $f_d : S^1 \to S^1$, $f_d(z) = z^d$, $S^1 \subset \mathbb{C}$.

allora $\deg f_d = d$, infatti $\omega_1 : [0,1] \to S^1$

$\omega_1(t) = e^{2\pi i t} \Rightarrow (f \circ \omega_1)(t) = e^{2d\pi i t} = (p \circ \lambda_d)(t)$

$p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$, $\lambda_d(t) = d\,t$

$\Rightarrow \lambda_d$ sollevamento di $f \circ \omega_1$, $\lambda_d(0) = 0$ $\Rightarrow$

$\varphi(f_*([\omega_1])) = d \Rightarrow \deg f_d = d$.

Teorema

Siano $f, g : S^1 \to S^1$ continue. Allora

$\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

Dim $(f \circ g)_*([\omega]) = f_*(g_*([\omega])) = f_*(\deg g \cdot [\omega]) =$

$= \deg g \cdot f_*([\omega]) = \deg g \cdot \deg f \cdot [\omega]$

$(f \circ g)_*([\omega]) = \deg(f \circ g) \cdot [\omega]$.

Teorema

Siano $f, g : S^1 \to S^1$ continue. Allora

$f \simeq g \iff \deg f = \deg g$.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_* \Rightarrow \deg f = \deg g$

($\pi_1(S^1)$ abeliano)

$\boxed{\Leftarrow}$ A meno di comporre f e g con rotazioni $\rho_\theta : S^1 \to S^1$ di angolo θ possiamo assumere $f(*) = g(*) = * = (1,0)$.
Infatti ρ_θ ha matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e si ha

$\rho_\theta \simeq id_{S^1}$ $\quad R : S^1 \times [0,1] \to S^1$

$R(x,t) = \rho_{t\theta}(x)$ è un'omotopia $id_{S^1} \simeq \rho_\theta$

$\Rightarrow f \simeq \rho_\theta \circ f \quad \forall f : S^1 \to S^1, \ \forall \theta$.

$\deg f = \deg g = d \rightsquigarrow \tilde{\omega}$ sollevamento di $f \circ \omega_1$, $\tilde{\omega}(0) = 0$
$\tilde{\omega}'$ sollevamento di $g \circ \omega_1$, $\tilde{\omega}(0) = 0$, mediante $p : \mathbb{R} \to S^1$.
$\tilde{\omega}(1) = \deg f$, $\tilde{\omega}'(1) = \deg g \Rightarrow \tilde{\omega}(1) = \tilde{\omega}'(1) = d \Rightarrow \tilde{\omega} \simeq_{\{0,1\}} \tilde{\omega}'$
$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ omotopia rel $\{0,1\}$ tra
$h_0 = \tilde{\omega}$ e $h_1 = \tilde{\omega}'$ $\Rightarrow p \circ H : [0,1] \times [0,1] \to S^1$
soddisfa $p(H(0,s)) = p(0) = *$, $p(H(1,s)) = p(d) = *$
$\rightsquigarrow K : S^1 \times [0,1] \to S^1$, $K(e^{2\pi i t}, s) = (p \circ H)(t,s)$
ben definita e continua

$$K(e^{2\pi i t}, 0) = (p \circ H)(t,0) = (p \circ \tilde{\omega})(t) = (f \circ \omega_1)(t) = f(e^{2\pi i t}) \Rightarrow K_0 = f$$

Analogamente $K_1 = g \Rightarrow f \simeq g$.

Corollario Sia $f : S^1 \to S^1$ continua. Allora
$f \simeq \text{cost} \iff \deg f = 0$ e $f \simeq id_{S^1} \iff \deg f = 1$.

Teorema fondamentale dell'algebra

Sia $p \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio di grado ≥ 1. Allora p ha almeno uno zero $\alpha \in \mathbb{C}$, cioè $p(\alpha) = 0$.

Dim Non è restrittivo supporre p monico:

$$p(z) = z^d + q(z) \quad \deg q < d, \quad d \geq 1.$$

Per assurdo supponiamo $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

$z = ru, \quad u \in S^1 \subset \mathbb{C}, \quad r = |z| \geq 0 \quad \rightsquigarrow$

$$\varphi_r : S^1 \to S^1, \quad \varphi_r(u) = \frac{p(ru)}{|p(ru)|}$$

$$\varphi_r(u) = \frac{r^d u^d + q(ru)}{|r^d u^d + q(ru)|} = \frac{u^d + r^{-d} q(ru)}{|u^d + r^{-d} q(ru)|} \quad \forall r > 0$$

$r \gg 1, u \in S^1 \Rightarrow |r^{-d} q(ru)| < \frac{1}{2}$ perché $\deg q < d$.

per $r \gg 1$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall u \in S^1$ si ha: $u^d + t r^{-d} q(ru) \neq 0$

$$H : S^1 \times [0,1] \to S^1 \qquad H(u,t) = \frac{u^d + t r^{-d} q(ru)}{|u^d + t r^{-d} q(ru)|}$$

ben definita e continua $h_0(u) = u^d$, $h_1 = \varphi_r \quad (r \gg 1)$

$\deg h_0 = d \Rightarrow \deg \varphi_r = d \neq 0 \Rightarrow \varphi_r \not\simeq \text{cost}$.

$j_r : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$, $j_r(u) = ru$; $\psi : \mathbb{C} \to S^1$, $\psi(z) = \dfrac{p(z)}{|p(z)|}$

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "j_r"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_r"'] & \mathbb{C} \arrow[r, "\psi"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ contraibile $\Rightarrow j_r \simeq \text{cost} \Rightarrow \varphi_r \simeq \text{cost}$

contraddizione.