14/12/2021

Proprietà della FT (Parte 3)

Proprietà 8 (derivata in x)

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ e sia $f' \in L^1(\mathbb{R})$, allora si ha che

$$\widehat{\frac{df}{dx}}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

Dim Siccome la funzione $f \in C^1$ si ha che

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

Siccome $f' \in L^1$, esistono finiti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{\infty} f'(t)\,dt$$

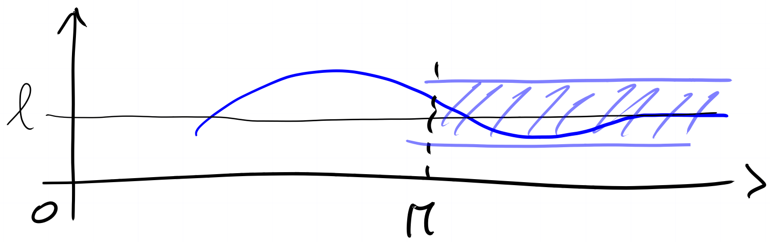
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = f(0) - \int_{-\infty}^{0} f'(t)\,dt$$

Siccome $f \in L^1$ tali limiti sono nulli, vediamo perché ciò è vero.

Supponiamo, per esempio che $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \neq 0$

Se ciò è il caso $\exists M > 0$ tc $\forall x > M$ si ha che

$$\ell/2 < |f(x)| < 3/2\, \ell$$



Se ciò è vero allora $\int_{\mathbb{R}} |f| \geq \int_{x > M} |f| \geq \int_{|x| > M} \ell/2 = \infty$ $\lightning$

Ad ogni modo: abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

dunque risulta che

$$\widehat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \overset{(IPP)}{=} \underbrace{\left[f(x) e^{-i\omega x} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = i\omega \hat{f}(\omega)$$

#

Osservazione Non serve che $f \in C^1$ ma basta che

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt$$

Proprietà 9 (derivate successive in x)

Sia $f \in C^k(\mathbb{R})$, $f', f'', \dots, f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\widehat{\frac{d^j f}{dx^j}}(\omega) = (i\omega)^j \hat{f}(\omega) \qquad \text{per ogni } j = 1, \dots, k.$$

Proprietà 10 (derivata in ω)

primo momento
o momento lineare

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e, posto $g(x) = x f(x)$ allora

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega} = -i\, \hat{g}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \frac{1}{i} \hat{g}(\omega)$$

Dim Usiamo il thm di derivazione sotto il segno di integrale. Definiamo la funzione ausiliaria

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x,\omega) \longmapsto f(x)\, e^{-i\omega x}$$

Si ha che

- $h(\circ, \omega) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è integrabile $\forall \omega \in \mathbb{R}$
- $h(x, \circ) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ q.o. $x \in \mathbb{R}$
- $|h(x,\omega)| = |f(x)|$ e $|\partial/\partial\omega\, h(x,\omega)| = |i x f(x) e^{-i\omega x}|$
$$= |g(x)|$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ con $|f|, |g| \in L^1$

Dunque il thm di derivazione sotto segno di integrale ci assicura che

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,\omega)\, dx$$

è di classe $\mathcal{C}^1$ e inoltre

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\omega} h(x,\omega)\, dx = -i \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$
$$= -i\, \hat{g}(\omega).$$

//

Calcolo esplicito della FT di una gaussiana

$$G_a(x) = e^{-ax^2}$$

Caso $a = 1$ Sia $f(x) = G_1(x) = e^{-x^2}$.

$\rightsquigarrow f \in L^1(\mathbb{R})$ $[\, \partial_x^k f$ è L^1 $\forall k \in \mathbb{N}\,]$

e in particolare

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \|f\|_1 = \sqrt{\pi}$$

Poiché $xf(x) = x e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ per la proprietà della derivazione in frequenza risulta che

$$\underbrace{\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} e^{-i\omega x}\, dx}_{=A}$$

Consideriamo ora la funzione $f'(x) = -2x e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ e per la proprietà di derivazione nello spazio si ha che

$$\hat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \underbrace{-2\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} e^{-i\omega x}\, dx}_{=A}$$

$$= i\omega \hat{f}(\omega)$$

Otteniamo dunque che

$$\left.\begin{aligned} A &= i\frac{d}{d\omega}\hat{f} \\ A &= -\frac{i}{2}\omega\hat{f} \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$$i\frac{d}{d\omega}\hat{f} = -\frac{i}{2}\omega\hat{f} \iff \frac{d\hat{f}}{d\omega} = -\frac{1}{2}\omega\hat{f}$$

$$\int \frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = -\int \frac{\omega}{2}\, d\omega \rightsquigarrow \log\hat{f} = -c\,\frac{\omega^2}{4}$$

$$\rightsquigarrow \hat{f}(\omega) = k\, e^{-\omega^2/4}$$

E questo conclude il calcolo esplicito della FT di una Gaussiana #

Caso $a > 0$ Sia $g(x) = e^{-ax^2}$ con $a > 0$ si ha che

$$g(x) = e^{-(\sqrt{a}\,x)^2} = f(\sqrt{a}\,x) = f\left(\frac{x}{1/\sqrt{a}}\right)$$

Per le proprietà di cambio di scala otteniamo che

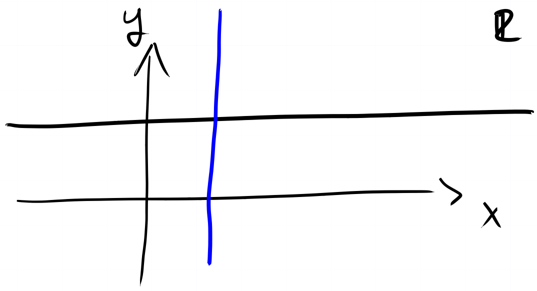
$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}}\hat{f}\left(\frac{\omega}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-\omega^2/4a} \quad \#$$

Relazioni tra integrali doppi e integrali iterati

Teorema di Fubini-Tonelli

(F) Sia $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e integrabile, allora

- per q.o. $x \in \mathbb{R}$, $h(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile
- per q.o. $y \in \mathbb{R}$ $h(\cdot, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile
- $\int_{\mathbb{R}} h(\cdot, y)\, dy : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è integrabile
- $$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dx \right) dy$$



(T) Sia $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ misurabile e

- $h(x,y) \geq 0$ q.o. in $\mathbb{R}^2$
- per q.o. $x \in \mathbb{R}$, $h(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è integrabile
- $\int_{\mathbb{R}} h(\cdot, y)\, dy : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è integrabile

allora h è integrabile in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e si ha che

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dy \right) dx$$

OSS esiste una versione di (T) nel quale x e y si scambiano i ruoli.

Convoluzione di 2 funzioni

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che, posto $h(x,y) = f(x-y)\,g(y)$ $h(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$. Definiamo la convoluzione di f e g la funzione $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data da

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x-y)\,g(y)}_{h(x,y)}\,dy = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt = (g*f)(x)$$

Teorema Siano f e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $h(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$, $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ e $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Dim Applichiamo il teorema di Tonelli alla funzione $|h(\cdot,\cdot)|$ per mostrare che $h \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.
Si ha che

- per q.o. $y \in \mathbb{R}$ $|h(\cdot, y)| \in L^1$, infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x,y)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,dx$$

$$= |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt < \infty \quad \text{q.o. } y \in \mathbb{R}.$$

- $\int_{\mathbb{R}} |h(x,\circ)|\,dx \in L^1(\mathbb{R})$, infatti

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |h(x,y)|\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,|f(x-y)|\,dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,dx \right) dy$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dy \right) < \infty$$

Dunque il teorema di Tonelli garantisce che $|h(\cdot,\cdot)| \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ e quindi $h(\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Il teorema di Fubini implica allora che per q.o. $x \in \mathbb{R}$

$$h(x,\cdot) = f(x-\cdot)\, g(\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$$

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dy \in L^1(\mathbb{R})$$

Inoltre risulta che

$$\|f*g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\, dy \right| dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy \right| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \right) dx \qquad \text{(Teorema del modulo)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dx \right) dy \qquad \text{(Teorema di Fubini)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, |g(y)|\, dt \right) dy \qquad \text{(cambio di variabile } x-y=t\text{)}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\, dy \right)$$

$$= \|f\|_1 \, \|g\|_1$$

Proprietà 11 (FT della convoluzione)

Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, allora

$$\widehat{f*g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\, \hat{g}(\omega)$$

Dim Applichiamo il teorema di Fubini :

$$\widehat{f*g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, e^{-i\omega x}\, dx \right) g(y)\, dy$$

$$\overset{x-y=t}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\omega t}\, e^{-i\omega y}\, dt \right) g(y)\, dy$$

$$= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right)}_{\hat{f}(\omega)} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\, e^{-i\omega y}\, dy \right)}_{\hat{g}(\omega)}$$

$$= \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$$

\#