

Recap

Abbiamo definito l'operatore convoluzione

Se f e g sono funzioni C^∞ a supporto compatto allora

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$$

E abbiamo visto che non serve supporre tanto regolarità in f e g ma se abbiamo

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f * g \in L^1(\mathbb{R}) \text{ e si ha che}$$

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Convoluzioni: esempi, applicazioni e proprietà

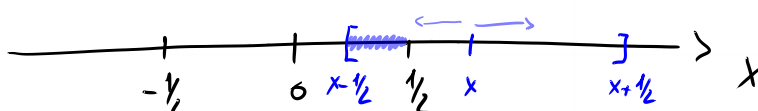
Esempio Sia $p_1(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Essendo $p_1(x-y) = 1 \iff -\frac{1}{2} \leq x-y \leq \frac{1}{2}$

$$\iff x - \frac{1}{2} \leq y \leq x + \frac{1}{2}$$

Si ottiene che

$$\begin{aligned} (p_1 * p_1)(x) &= \int_{\mathbb{R}} p_1(x-y) p_1(y) dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} p_1(x-y) dy \\ &= \int_{\substack{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cap [x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}]} 1 dy = m\left([- \frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cap [x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]\right) \end{aligned}$$



Oss La funzione p_1 non è continua, ma la funzione $p_1 * p_1$ lo è,

al di là dell'esempio specifico riportato sopra l'operatore di convoluzione ha degli effetti "regolarizzanti".

Proprietà delle convoluzioni

Siano $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha che

- i) $f * g = g * f$
- ii) $(f+g) * h = f * h + g * h$
- iii) $(f * g) * h = f * (g * h)$
- iv) $(\lambda f) * g = \lambda (f * g)$

Provare per caso le proprietà i) - iv)

- v) Se f ha supporto compatto, ossia $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in B^c(0,2)$, e almeno una tra f e g è una funzione di classe $\mathcal{C}^k$ allora $f * g \in \mathcal{C}^k$.

Idea della dimostrazione

Supponiamo che $f \in \mathcal{C}^k$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \quad \text{e dunque}$$

$$\partial_x^k (f * g)(x) = \partial_x^k \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x-y) g(y) dy$$

Se g è $\mathcal{C}^k$ allora utilizzo la proprietà i) (commutatività della convoluzione) e ottengo il claim.

Un accenno al caso multi-dimensionale

Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora

$$(f * g)(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) g(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$$

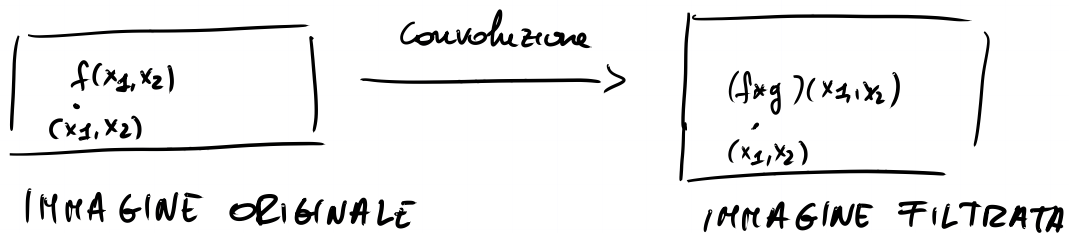
Esempio

Sia f una funzione che associa a ogni elemento $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ un tono di grigio

→ g è un fattore di convoluzione o nucleo convolutivo, ossia una funzione positiva con $\|g\|_1 = 1$ e $g \in C^\infty$.

f descrive l'immagine B/N originale

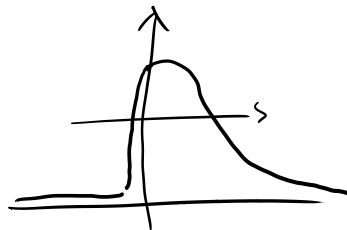
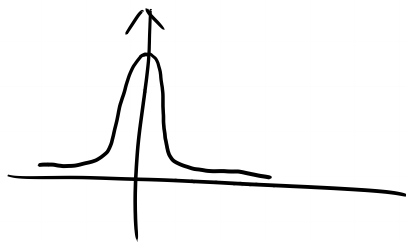
$f * g$ descrive un'immagine filtrata



L'applicazione dell'operatore convoluzione regolarizza e "sfoca"



L'effetto "flou".



Dall'analisi di Fourier alla sintesi

Caso periodico:

f periodica di periodo T

Analisi

————> Associamo $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega x} dx$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Ci dà una serie di Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\omega x}$

Abbiamo visto che dato una serie di Fourier non è sempre facile ritornare alla funzione di partenza (fase di sintesi).

Q Possiamo sviluppare un discorso analogo per funzioni che non sono periodiche ma sono definite in $\mathbb{R}$?

Premessa

Dato la FT $F(f)$ di f è possibile risalire alla funzione f ?

In altre parole, è possibile invertire la trasformata di Fourier come operatore tra spazi funzionali?

Schema: funzione $\xrightarrow[\text{analisi}]{\text{FT}}$ spettro $\xrightarrow[\text{sintesi}]{\text{AFT?}}$ funzione

Anti-trasformata di Fourier

Sia $g \in L^1(\mathbb{R})$, si definisce come anti-trasformata di Fourier (AFT) di g la funzione

$$\mathcal{G}(g)(x) = \check{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$



Osservazione importante

Si ha che

$$\mathcal{G}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(\omega) e^{-i(-x)\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} F(g)(-x)$$

Esercizio a casa
per la AFT.

Provare le proprietà 1-11 date per la FT

Problema Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, vale la formula

$$\mathcal{G}(F(f)) = f \quad ?$$

Ossia

$$\mathcal{G}(F(f))(x) = f(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R} \quad ?$$

Condizione necessaria

Sia $f \in L^1$ e sia $\hat{f} = F(f)$ la FT di f . Se vale la relazione

$$\mathcal{G}(F(f))(x) = f(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}$$

allora, per le proprietà della FT e della AFT deve esistere

$$h \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$$

e tale che

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) = 0$$

tale che

$$f(x) = h(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}$$

Teorema di inversione di Fourier

Se $\underline{f \in L^1(\mathbb{R})}$ e $\underline{\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})}$ allora per q.o. $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{G}(\hat{f})(x) = f(x)$$

cioè

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\omega y} dy}_{\hat{f}(\omega)} \right) e^{i\omega x} d\omega = f(x)$$

Conseguenze del teorema di inversione di Fourier

Formula di dualità Sia $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ allora per q.o. $x \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(f)(x) = 2\pi f(-x)$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))$$

Dim Segue dal teorema di inversione di Fourier osservando che

$$\mathcal{G}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)(-x).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\omega) e^{i\omega x} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\omega) e^{-i\omega(-x)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)(-x) \end{aligned}$$

Teorema di unicità

Siano $f, g \in L^1$ e t.c. $\hat{f}, \hat{g} \in L^1$, si ha

$$\hat{f} = \hat{g} \text{ in } \mathbb{R} \iff \underline{f = g \text{ q.o. in } \mathbb{R}}$$

ossia ogni funzione integrabile individua il suo spettro in maniera univoca e viceversa.

FT di un prodotto di funzioni

$f, g, fg \in L^1$ e $\hat{f}, \hat{g}, \widehat{fg} \in L^1$ allora

$$\widehat{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}(\omega)$$

Dim. Siccome per ipotesi $\hat{f}, \hat{g} \in L^1 \Rightarrow \hat{f} * \hat{g} \in L^1$, essendo dunque $\hat{f} * \hat{g} \in L^1$, sappiamo che $\forall \hat{h} \in L^1$

$$|\mathcal{G}(\hat{h})(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(\omega)| d\omega < \infty$$

Possiamo dunque calcolare

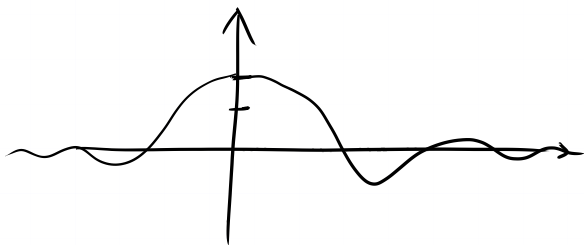
$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\hat{f} * \hat{g})(x) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f} * \hat{g})(-x) \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f})(-x) \right) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{g})(-x) \right) \\ &= 2\pi \mathcal{G}(\hat{f})(x) \cdot \mathcal{G}(\hat{g})(x) \\ &= 2\pi f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

e quindi applicando $\mathcal{F}$ si conclude che

$$\frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{g})(\omega) = \mathcal{F}(f \cdot g)(\omega) = \hat{f} \hat{g}(\omega)$$

Problema Come definire la FT per $f \notin L^1(\mathbb{R})$?

Un esempio potrebbe essere la funzione $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$



$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx < \infty$$

tuttavia

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$$

e infatti si ha che $x \mapsto \frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$ ma non è L^1

$$\int \left| \frac{\sin x}{x} \right|^2 dx < \infty$$

Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$

Nelle applicazioni risulta utile (e fisicamente rilevante) applicare la FT a funzioni che hanno energia finita. Tuttavia se $f \in L^2(\mathbb{R})$ non è garantito che $f \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi, a priori, non possiamo garantire che

$$|\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| < \infty$$

Teorema di Plancherel

FT in $L^2(\mathbb{R})$ L'operatore FT $\mathcal{F}: L^1 \cap L^2 \rightarrow L^\infty$ si estende in modo univoco a un operatore $\overline{\mathcal{F}}: L^2 \rightarrow L^2$ lineare, continuo, biiettivo e che verifica $\forall f, g \in L^2$

$$(\overline{\mathcal{F}}(f), \overline{\mathcal{F}}(g))_2 = 2\pi (f, g)_2$$

In particolare ciò implica che

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$$