VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

MISURA IMMAGINE

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ SPAZIO DI PROBABILITÀ

X V.A.

ALLORA

$P^X = P \circ X^{-1}$, DEFINITA DA

$$P^X(B) = P(X \in B) = P(X^{-1}(B)) \quad B \in \mathcal{B}$$

È UNA PROBABILITÀ SU $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, NOTA COME MISURA IMMAGINE DI P TRAMITE X, DISTRIBUZIONE O LEGGE DI X

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

DI UNA V.A. X SU $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, RESTRIZIONE DI P^X AGLI INTERVALLI $B = (-\infty, x]$, COME FUNZIONE DI $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = P^X((-\infty, x]) =$$

$$= P(X \leq x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$

PROPRIETÀ DI F_X:

(i) F_X NON DECRESCENTE

(ii) F_X CONTINUA A DX

(iii) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

(iv) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

SE $a < b$, $P(X > a) = 1 - F_X(a)$

(v) $\lim_{y \to x^-} F_X(y) = P(X < x)$

(vi) "SALTO" DI F_X IN x:

$$F_X(x) - \lim_{y \to x^-} F_X(y) = P(X = x)$$

INOLTRE: DATA UNA FUNZIONE $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ CHE SODDISFA (i), (ii), (iii) ($\equiv$ UNA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE), ALLORA

1) ESISTE UN UNICA PROB. P SU $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ TALE CHE

$$P((-\infty, x]) = F(x)$$

2) ESISTE UNA V.A. X SU UNO SPAZIO DI PROB. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ TALE CHE $F_X = F$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ X, Y V.A.

SE $F_X = F_Y$ SI DICE CHE X E Y HANNO LA STESSA LEGGE, $X \sim Y$

$\Rightarrow P_X = P_Y$

SE $X = Y$ Q.C. ALLORA HANNO LA STESSA LEGGE, MA NON VICEVERSA

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

LEMMA: OGNI F.D.R. HA AL PIÙ UN NUMERABILE DI DISCONTINUITÀ

LEMMA: SU $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(A_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathcal{F}$ TALI CHE

* (A_α) A DUE A DUE DISGIUNTI
* $P(A_\alpha) > 0$

$\Rightarrow I$ AL PIÙ NUMERABILE

PROVA: $I_n = \{\alpha \in I : P(A_\alpha) > \frac{1}{n}\}$

$\# I_n < n$. INFATTI SE

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in I_n$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P(A_{\alpha_i})}_{> 1/n} > 1$$

$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ UNIONE ~~[illegible]~~ AL PIÙ NUMERABILE DI INSIEMI AL PIÙ NUMERABILI

PROVA: $\left(\{X = x\},\ x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0 \right)$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

VARIABILE ALEATORIA DISCRETA

FINITO O NUMERABILE DI VALORI

$x_1 \ldots x_n \ldots$

F_X È COSTANTE TRA DUE DETERMINAZIONI $x_i < x_{i+1}$ CONSECUTIVE, SALTA IN CORRISPONDENZA DI x_i CON VALORE $P(X = x_i) =: p_i = F_X(x_i) - F_X(x_i^-)$

SI PREFERISCE IN QUESTO CASO ASSEGNARE DIRETTAMENTE LE DETERMINAZIONI x_i E LE MASSE DI PROBABILITÀ p_i

(CON $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$)

POI LA F.D.R F_X È

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

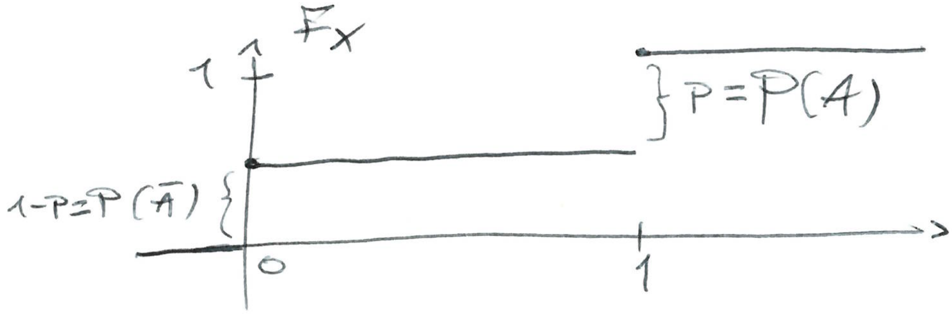
INOLTRE $P_X(B) = P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} p_i$

$B \in \mathcal{B}$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

ESEMPI: * $X = c$ DEGENERE

* $X = 1_A = \begin{cases} 0 & \bar{A} \\ 1 & A \end{cases}$ $\quad P(\bar{A}) = 1-p$, $\quad P(A) = p$



BERNOULLI(p)
$0<p<1$

* X HA DISTRIBUZIONE BINOMIALE(n, p) $\quad n \geq 1$, $0<p<1$

SE X HA VALORI $0, 1, 2, \dots, n$

CON MASSA

$$P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

SE $E_1, \dots, E_n$ INDIPENDENTI CON $P(E_i) = p$, ALLORA X È IL NUMERO DI EVENTI E_i VERI (NUMERO DI SUCCESSI)

$$X = 1_{E_1} + 1_{E_2} + \dots + 1_{E_n}$$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

* $X \sim \text{POISSON}(\mu)$ $\qquad \mu > 0$

VALORI $0, 1, 2, 3, \ldots$

CON MASSA

$$P(X = i) = e^{-\mu} \frac{\mu^i}{i!} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

* $X \sim \text{GEOMETRICA}(p)$ $\qquad 0 < p < 1$

VALORI $1, 2, 3, \ldots$

CON MASSA

$$P(X = i) = (1-p)^{i-1} \cdot p \qquad i \geq 1$$

X = TEMPO DI ATTESA PER IL PRIMO SUCCESSO IN UNA SEQUENZA DI EVENTI INDIP. DI UGUAL PROB. p

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ X V.A.

X È CONTINUA SE F_X È UNA FUNZIONE CONTINUA (A SX!)

QUINDI

$$P(X = x) = F_X(x) - \lim_{y \to x^-} F_X(y)$$
$$= F_X(x) - F_X(x) = 0$$

TRA LE V.A. CONTINUE ASSUMONO PARTICOLARE IMPORTANZA QUELLE ASSOLUTAMENTE CONTINUE, PIÙ SEMPLICEMENTE CHIAMATE V.A. DOTATE DI DENSITÀ (DI PROBABILITÀ)

ESISTE $f_X(x) : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, INTEGRABILE TALE CHE

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

E QUINDI

$$P^X(B) = P(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx$$

$B \in \mathcal{B}$

SI PUÒ ASSEGNARE DIRETTAMENTE UNA DENSITÀ TRAMITE UNA FUNZIONE $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE TALE CHE

1) $f(x) \geq 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

E DEFINIRE $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$, $x \in \mathbb{R}$

F È UNA FDR (SODDISFA (i), (ii), (iii))

ESISTE UNA V.A. X CHE HA FDR F E DENSITÀ f

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

PROPRIETÀ DELLA DENSITÀ f_X

* SE $x \in \mathbb{R}$: f_X È CONTINUA IN x
  ALLORA

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = F_X'(x) = f_X(x)$$

QUINDI

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{F_X(x+\Delta) - F_X(x)}{\Delta} = f_X(x)$$

O ANCHE

$$F_X(x+\Delta) - F_X(x) = \Delta \cdot f_X(x) + o(\Delta)$$

DOVE $o(z)$ È TALE CHE $\lim_{z \to 0} \frac{o(z)}{z} = 0$

$$P(x < X \leq x+\Delta) = \Delta \cdot f_X(x) + o(\Delta)$$

$$\simeq \Delta \cdot f_X(x) \quad \text{PER } \Delta \text{ "PICCOLO"}$$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

* IN GENERALE, $\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$ QUASI OVUNQUE (RISPETTO ALLA MISURA DI LEBESGUE)

* ~~SE XXXXX È UNA FUNZIONE~~ f_X NON È UNICA (A DIFFERENZA DI F_X). SI PUÒ MODIFICARE f_X IN UN NUMERO FINITO (O NUMERABILE) DI PUNTI SENZA ALTERARE F_X

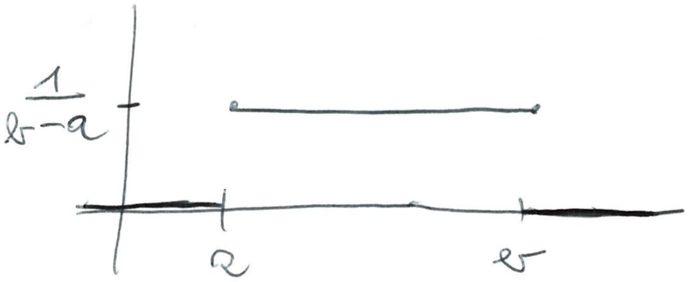
* SE F_X È UNA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE E LA DERIVATA $\frac{dF_X(x)}{dx} = F'_X(x)$ ESISTE TRANNE CHE IN ~~XX~~ DEI PUNTI $\ldots x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ ALLORA $F'_X(x)$ È (UNA) DENSITÀ DI X (BASTA DEFINIRE LA DERIVATA IN MODO ARBITRARIO NEGLI x_i)

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

ESEMPI

* $X \sim U(a,b)$ UNIFORME SU (a,b)

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$



$1 - U \sim U$

* $X \sim EXP(\lambda)$ ESPONENZIALE DI PARAMETRO $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

TROVARE LA F.D.R. DI $Y = X^{1/\gamma}$ $(\gamma > 0) \to$ WEIBULL

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

* $X \sim \text{GAMMA}(\alpha, \lambda)$ $\qquad \alpha > 0$, $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx \qquad \alpha > 0$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$ (INTEGRAZIONE PER PARTI)

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$Y = e^X \longrightarrow \text{LOGNORMALE}(\mu, \sigma^2)$

TROVARE LA DENSITÀ

VARIABILI ALEATORIE DI TIPO MISTO

"MISTURA" DI PROBABILITÀ E FUNZIONI DI RIPARTIZIONE:

* P, Q PROB. SU $(\Omega, \mathcal{F})$, ALLORA $\lambda P + (1-\lambda) Q$ È UNA PROB. SU $(\Omega, \mathcal{F})$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$

* F, G F.D.R, ALLORA $\lambda F + (1-\lambda) G$ È UNA F.D.R. $(0 \leq \lambda \leq 1)$

* SE X, Y V.A. CON F.D.R. F_X, F_Y ALLORA $\lambda F_X + (1-\lambda) F_Y$ È LA F.D.R. DELLA "LOTTERIA" IN CUI SI RICEVE X CON PROB λ E Y CON PROB. $1-\lambda$

$$Z = \begin{cases} X & \lambda \\ Y & 1-\lambda \end{cases}$$

VARIABILI ALEATORIE DI TIPO MISTO

COSTRUZIONE: SIA $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = \lambda$

A INDIPENDENTE DA $\sigma(X, Y)$

$\sigma(\{A\})$

$$Z = 1_A \cdot X + 1_{\bar{A}} \cdot Y$$

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{SE } \omega \in A \\ Y(\omega) & \omega \notin A \end{cases}$$

$A = \{X$ VIENE SELEZIONATO$\}$

VARIABILI ALEATORIE DI TIPO MISTO

X V.A. F_X F.D.R.

X POTREBBE NON ESSERE NÉ DISCRETA NÉ CONTINUA

SIA $I = \{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\}$

E DEFINIAMO

$$F_d(x) = \frac{1}{\lambda} \overbrace{\sum_{\substack{y \in I \\ y \leq x}} P(X = y)}^{\text{NON È FDR}}$$

F.D.R DISCRETA

$$F_c(x) = \frac{1}{1-\lambda}\left(F(x) - \lambda F_d(x)\right)$$

F.D.R. CONTINUA

$$= \frac{1}{1-\lambda} \underbrace{\left(F(x) - \sum_{\substack{y \in I \\ y \leq x}} P(X = y)\right)}_{\text{NON È F.D.R.}}$$

RIESCE

$$F(x) = \lambda F_d(x) + (1-\lambda) F_c(x)$$

F_d COMPONENTE DISCRETA

F_c " CONTINUA

VARIABILI ALEATORIE DI TIPO MISTO

SPESSO SI ASSEGNANO DIRETTAMENTE LE MASSE

x_i, p_i CON $\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} p_i}_{=\lambda} < 1$

$i = 1, 2, \ldots$

E LA "DENSITÀ" $\tilde{f}(x) \geq 0$ TALE CHE

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)\, dx}_{=1-\lambda} < 1$$

$$F(x) = \lambda F_d(x) + (1-\lambda) F_c(x)$$

$$= \cancel{\lambda} \frac{1}{\cancel{\lambda}} \sum_{x_i \leq x} p_i + \cancel{(1-\lambda)} \frac{1}{\cancel{1-\lambda}} \int_{-\infty}^{x} \tilde{f}(u)\, du$$

$$= \sum_{x_i \leq x} p_i + \int_{-\infty}^{x} \tilde{f}(u)\, du$$

VARIABILI ALEATORIE DI TIPO MISTO

ESEMPI:

* EDIFICIO DAL VALORE 100M € SOGGETTO A RISCHIO INCENDIO.

CON PROB. 50% NON C'È INCENDIO
5% L'EDIFICIO VIENE DISTRUTTO COMPLETAMENTE

IL DANNO È PER IL RESTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO TRA 0 E 100M

X DANNO FDR?

* X PERDITA IN UN PORTAFOGLIO ASSICURATIVO

$$Y = \mathrm{MIN}(\mathrm{MAX}(X - d, 0), \ell - d)$$

ESEMPI

* $X \sim \text{POISSON}(\mu)$

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} \qquad \leftarrow \underline{n=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}$$

$$= \mu e^{-\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \mu e^{-\mu} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!}}_{e^{\mu}} = \mu$$

* $X \sim \text{GAMMA}(\alpha, \lambda)$

$$E[X] = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{(\alpha+1)-1} e^{-\lambda x}}_{\text{DENSITÀ DI GAMMA}(\alpha+1,\lambda)} \, dx$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

ESEMPI

* $X \sim N(0,1)$ NORMALE STANDARD

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\left(e^{-x^2/2}\right)' = -x e^{-x^2/2}$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left[e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2/2} - \lim_{x \to -\infty} e^{-x^2/2} = 0}$$

$$= 0$$

$$Y = \mu + \sigma X \qquad \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma > 0$$

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\mu + \sigma X \leq x)$$

$$= P\left(X \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F_X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

ESEMPI

* $$f_Y(x) = \frac{dF_Y(x)}{dx} =$$

$$= \frac{dF_X}{dx}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= f_X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

DENSITÀ DI $N(\mu,\sigma^2)$

$$E[Y] = \mu + \sigma \cdot E[X]$$

$$= \mu$$

* $X \sim$ CAUCHY

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad x \in \mathbb{R}$$

NON È INTEGRABILE

$$E[|X|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f_X(x)$$

BJBMPI

*

$$E[|X|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$$

$$= +\infty$$

$$\int_{0}^{+\infty} |x| \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\left(\log(1+x^2)\right)'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left[\log(1+x^2)\right]_{0}^{+\infty}}_{\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \log(1+x^2)}_{=+\infty} - \underbrace{\lim_{x\to 0} \log(1+x^2)}_{=0}} = +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{0} |x| \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = -\int_{-\infty}^{0} x \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$$

$y=-x$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{y}{\pi(1+y^2)} dy = +\infty$$

SPERANZA MATEMATICA

LEMMA $1 \leq p < q$, ALLORA $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^q$

PROVA: SE $x \geq 1$, $x^p \leq x^q$

$0 \leq x < 1$ $\quad x^p \geq x^q$

$$E[|X|^p] = E\left[|X|^p \left\{ 1_{\{|X|<1\}} + 1_{\{|X| \geq 1\}} \right\}\right]$$

$$= E[\underbrace{|X|^p}_{\leq 1} 1_{\{|X|<1\}}] + E[\underbrace{|X|^p}_{\leq |X|^q} \underbrace{1_{\{|X| \geq 1\}}}_{\leq 1}]$$

$$\leq \underbrace{P(|X|<1)}_{\leq 1} + \underbrace{E[|X|^q]}_{<+\infty}$$

QUINDI $\mathcal{L}^p$ È UN SOTTO-SPAZIO VETTORIALE DI $\mathcal{L}^q$

SPERANZA MATEMATICA

DISUGUAGLIANZA DI JENSEN

$f : I \to \mathbb{R}$ CONVESSA, MISURABILE

X V.A. $X \in I$ q.c.

$f(X) \in \mathcal{L}^1$

ALLORA $X \in \mathcal{L}^1$ E

$$f(E[X]) \leq E[f(X)]$$

ESEMPI: $f(x) = |x|$ $\quad |E[X]| \leq E[|X|]$

$f(x) = x^2$ $\quad E[X]^2 \leq E[X^2]$

$f(x) = \log x$ $\quad E[X] \geq \exp(E[\log X])$

SPERANZA MATEMATICA

CONVERGENZA DELLA SPERANZA MATEMATICA

X_n SUCCESSIONE DI V.A. $\in \mathcal{L}^1$

X V.A

$X_n \to X$ Q.C.

$$P(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \xrightarrow{n \to \infty} X(\omega)\}) = 1$$

$$E[X_n] \to E[X] \ ?$$

TEOREMA DI CONVERGENZA MONOTONA

$0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ Q.C., PER OGNI $n \geq 1$

ALLORA $X_n \to X = \sup_n X_n$ Q.C.

E

$$\lim_n E[X_n] = E[X]$$

(POSSIBILMENTE $+\infty$)

SPERANZA MATEMATICA

TEOREMA DI CONVERGENZA DOMINATA

X_n V.A. $\quad X_n \to X$ Q.C.

ESISTE Y V.A. $\in \mathcal{L}^1$ TALE CHE

$|X_n| \leq Y$ Q.C.

ALLORA $X_n, X \in \mathcal{L}^1$ E

$$E[X_n] \xrightarrow{n \to \infty} E[X]$$

SPERANZA MATEMATICA

ESEMPIO: * $X_n \geq 0$ Q.C.

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$$

* X_n V.A.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|] < +\infty$$

ALLORA $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ CONVERGE

ASSOLUTAMENTE Q.C.,

$\in \mathcal{L}^1$ E

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$$

PROVA: $\sum |X_n| \in \mathcal{L}^1$ DALL'
ESEMPIO PRECEDENTE

$\sum |X_n| < +\infty$ Q.C.

$$\left|\sum_{n=1}^{N} X_n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |X_n| \leq \sum |X_n|$$

E SEGUE DAL TEOREMA
DI CONVERGENZA
DOMINATA

SPERANZA MATEMATICA

ESEMPI

* $X_n \sim U(0, \frac{1}{2^{n-1}})$ $\quad n = 1, 2, 3, \dots$

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$\sum X_n$ CONVERGE Q.C.

$$\sum X_n \leq \sum \frac{1}{2^{n-1}} = 2$$

SPERANZA MATEMATICA

$$* \quad Y_n = \begin{cases} -1 & 1-p_n \\ +1 & p_n \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$X_n = \frac{Y_n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E[\underbrace{|X_n|}_{\frac{1}{n!}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$E[\underbrace{\sum X_n}_{\text{INTEGRABILE}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{E[X_n]}_{p_n - (1-p_n) = 2p_n - 1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2p_n - 1}{n!}$$

SPERANZA MATEMATICA

SE $X \in \mathcal{L}^2$ $(\Rightarrow X \in \mathcal{L}^1)$

SI DEFINISCE

$$\sigma_X^2 = VAR[X] = E\left[(X - E(X))^2\right] \geq 0$$

LA VARIANZA DI X

$\sigma_X = \sqrt{VAR[X]}$ DEVIAZIONE STANDARD DI X

PROPRIETÀ : $X \in \mathcal{L}^2$

1) $VAR[X] = E[X^2] - E[X]^2$

2) $VAR[\alpha + \beta X] = \beta^2 \, VAR[X]$

PER OGNI $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3) $VAR[X] = 0$ SE E SOLO

SE X È DEGENERE

SPERANZA MATEMATICA

4) $P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$ BIENAYMÉ CEBICEV

QUINDI ($\varepsilon = K\sigma_X$, $K \geq 1$)

$$P(|X - E[X]| > K\sigma_X) \leq \frac{1}{K^2}$$

LEMMA (DISUGUAGLIANZA DI MARKOV)

$X \in \mathcal{L}^1$, $X \geq 0$

$P(X > \alpha) \leq \dfrac{E[X]}{\alpha}$ PER OGNI $\alpha > 0$

PROVA $E[X] = E[\underbrace{X}_{\geq \alpha} 1_{\{X > \alpha\}}] + \underbrace{E[X 1_{\{X \leq \alpha\}}]}_{\geq 0}$

$\geq \alpha \cdot P(X > \alpha)$