1

Si consideri uno spazio di Hilbert con un s.o.c. $\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$. È data la successione di vettori

$$f^{(n)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k\, e^{(k)} \; - b_{n+1} e^{(n+1)}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + |b_{n+1}|^2}} \ , \quad \forall\, n \geq 1 \ ,$$

dove $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e $\{b_n\}_{n\geq 2}$ sono due successioni di numeri complessi.

(i) Determina $\{b_n\}_{n\geq 2}$ in funzione di $\{a_n\}_{n\geq 1}$ in modo che $\{f^{(n)}\}_{n\geq 1}$ sia un sistema ortonormale.

(ii) Mostra che, con questa scelta di $\{b_n\}_{n\geq 2}$, $\{f^{(n)}\}_{n\geq 1}$ è un s.o.c. se e soltanto se $\{a_n\}_{n\geq 1} \notin l^2$.

2

La temperatura $T(t,x)$ di una barra metallica estesa lungo l'asse x nell'intervallo $x \in [-L, L]$ al tempo t soddisfa l'equazione del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \ .$$

Agli estremi la barra è tenuta a temperatura fissata, ovvero abbiamo condizioni al bordo $T(t,-L) = T(t,L) = 0$. Inoltre abbiamo la condizione iniziale

$$T(0,x) = T_0 \cos\left(\frac{9\pi x}{2L}\right) \ .$$

Si determini $T(t,x)$ sviluppando la funzione in un opportuno sistema completo, e risolvendo l'equazione e le condizioni iniziali per i coefficienti.