ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 9

Trieste, 21 dicembre 2021

1. Determinare il numero di elementi (ossia l'ordine) del gruppo $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ delle matrici invertibili $n \times n$, con coefficienti nel campo finito $K = \mathbb{Z}_p$ (dove p è un numero primo). (Suggerimento: contare quanti basi distinte vi sono nello spazio vettoriale $K^n = (\mathbb{Z}_p)^n$.)

2. Le matrici $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sono simili? Giustificare la risposta.

3. Siano $x_1, \ldots, x_n$ delle indeterminate. Far vedere che

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i).$$

   Si tratta del determinante detto *di Vandermonde*. (Suggerimento: trasformare la prima colonna in $(1, 0, \ldots, 0)$ con trasformazioni elementari sulle righe togliendo a ogni riga un multiplo della riga precedente,....)

4. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la matrice reale A è diagonalizzabile, e per quali $c \in \mathbb{R}$ lo è la matrice C :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   su un campo K. Determinare se A è diagonalizzabile sui campi $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$.

6. Dimostrare che la matrice reale
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
è diagonalizzabile, poi trovare una matrice S tale $S^{-1}AS$ sia diagonale. S è unica?

7. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{leq2}$ lo spazio vettoriale di dimensione 3 dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2, e sia $T : V \to V$ l'applicazione lineare che manda il polinomio $p(t)$ in $p(t+1)$. Scrivere la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{B} = (1, t, t^2 - 2/3)$. Trovare gli autovalori e gli autospazi di T, e verificare che T non è diagonalizzabile.