Cambio di base per forme bilineari

Def Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono <u>congruenti</u> se esiste una matrice <u>invertibile</u> $S \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c.

$$B = {}^tS A S$$

NB Non confondere la congruenza con la similitudine (per cui $B = S^{-1}AS$).
E' fondamentale che la matrice S che realizza la congruenza sia invertibile.

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $b: V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare. Siano $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{V}' = (v_1', \dots, v_n')$ due basi per V. Allora $M_{\mathcal{V}'}(b) = {}^tS\, M_{\mathcal{V}}(b)\, S$, dove $S = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'}(id_V)$ è la matrice del cambiamento di base.

OSS Le matrici di b rispetto a due basi di V sono congruenti. Si può dimostrare anche il viceversa.

Dim $v, w \in V$ con coordinate $X, Y \in \mathbb{K}^n$ rispetto a $\mathcal{V}$ e X', Y' rispetto a $\mathcal{V}'$.

$X = SX'$, $Y = SY'$. Poniamo $B = M_{\mathcal{V}}(b)$, $B' = M_{\mathcal{V}'}(b)$.

$${}^tX' B' Y' = X B Y = {}^tX'\, {}^tS B S Y' \quad \forall\ X', Y' \in \mathbb{K}^n$$

Per $X' = e_i$, $Y' = e_j$ (base canonica di $\mathbb{K}^n$):

$${}^te_i B' e_j = {}^te_i\, {}^tS B S e_j \implies b'_{ij} = ({}^tS B S)_{ij} \quad \forall\ i,j = 1, \dots, n$$

$$\implies B' = {}^tS B S, \text{ dove } B' = (b'_{ij}).$$

Def Una forma bilineare $b : V \times V \to \mathbb{K}$ è simmetrica se $b(v,w) = b(w,v)$ $\forall\, v, w \in V$.

Def $A \in M_n(\mathbb{K})$ è una matrice simmetrica se ${}^tA = A$ $\quad (\iff a_{ij} = a_{ji} \ \forall\, i,j = 1,\dots,n)$.

Es $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ è simmetrica, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ non lo è (su $\mathbb{R}$).

Teorema Sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare e $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ una base per V. Allora b è simmetrica $\iff$ $M_{\mathcal{V}}(b) \in M_n(\mathbb{K})$ è una matrice simmetrica.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $b_{ij} = b(v_i, v_j) = b(v_j, v_i) = b_{ji}$ $\forall\, i,j$

$\Rightarrow M_{\mathcal{V}}(b)$ simmetrica.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo $B = M_{\mathcal{V}}(b)$ matrice simmetrica.

$v, w \in V$ con coordinate risp. $X, Y \in \mathbb{K}^n$.

$$b(v,w) = {}^tX\, B\, Y = \underbrace{{}^t({}^tX\, B\, Y)}_{(\text{è uno scalare})} = {}^tY\, {}^tB\, X = {}^tY\, B\, X = b(w,v)$$

$\forall\, v, w \in V \implies b$ simmetrica.

Oss Se $b : V \times V \to \mathbb{K}$ è bilineare allora

$b(0_V, v) = b(v, 0_V) = 0 \quad \forall\, v \in V \implies b(0_V, 0_V) = 0$.

Es 1) $B \in M_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow b : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $b(X,Y) \overset{def}{=} {}^tX\, B\, Y$ bil.

2) $b_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $b_0(X,Y) \overset{def}{=} {}^tX\, Y$ è bilineare e simmetrica (forma bilineare canonica su $\mathbb{K}^n$).

Spazi Vettoriali Euclidei

Il campo sarà $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Def Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $b: V\times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Diciamo che b è definita positiva se $b(v,v)>0 \quad \forall\, v \in V - \{0_V\}$.

Una forma bilineare simmetrica e definita positiva è detta prodotto scalare su V e si denota con

$$\langle v, w\rangle := b(v,w).$$

Def Uno spazio vettoriale Euclideo è uno spazio vettoriale reale V munito di un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to\mathbb{R}$.

OSS $\langle v,v\rangle = 0 \iff v = 0_V$.

Es Su $\mathbb{R}^n$ definiamo il prodotto scalare canonico

$$\langle X,Y\rangle \overset{def}{=} {}^tX\,Y = x_1y_1+\dots+x_ny_n, \quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$\langle X,X\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0 \quad \text{se } X\neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Def Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. Due vettori $u,w\in V$ sono ortogonali se $\langle u,w\rangle=0$ e scriviamo $u\perp w$. Due sottospazi vettoriali $U, W\subset V$ sono ortogonali se $\langle u,w\rangle = 0 \quad \forall\, u\in U,\ \forall\, w\in W$ e scriviamo $U\perp W$.

Es 1) $0_V \perp w \quad \forall\, w\in V$

2) $e_i\perp e_j \quad \forall\, i\neq j$ in $\mathbb{R}^n$ col prodotto scalare canonico.

3) $(1,2,0)\perp(-2,1,4)$ in $\mathbb{R}^3$.

Teorema Sia V uno spazio vettoriale Euclideo, $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali, $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_r)$ una base di U e $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_s)$ una base di W. Allora $U \perp W$ $\iff \langle u_i, w_j \rangle = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, r, \ \forall\, j = 1, \dots, s$.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ ovvio.

$\boxed{\Leftarrow}$ $u \in U$, $w \in W \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{R}$ t.c.

$$u = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i, \quad w = \sum_{j=1}^{s} \beta_j w_j \Rightarrow$$

$$\langle u, w \rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \langle u_i, w_j \rangle = 0 \Rightarrow u \perp w \quad \forall\, u \in U, \ \forall\, w \in W$$

$\Rightarrow U \perp W$.

Def Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. Sia $T \subset V$ un sottoinsieme non vuoto. L'<u>ortogonale</u> di T è $T^\perp \overset{\text{def}}{=} \{ w \in V \mid \langle t, w \rangle = 0 \ \ \forall\, t \in T \} \subset V$.

Teorema $T^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V e $T^\perp = (\operatorname{span} T)^\perp$. Se $U \subset V$ è un sottospazio vettoriale allora $U \cap U^\perp = \{0_V\}$ e so la somma $U + U^\perp$ è diretta (<u>somma diretta ortogonale</u>). Inoltre $U \perp U^\perp$.

Dim • 1) $\langle t, 0_V \rangle = 0 \quad \forall\, t \in T \Rightarrow 0_V \in T^\perp \neq \emptyset$

2) $w_1, w_2 \in T^\perp \Rightarrow \langle t, w_1 + w_2 \rangle = \langle t, w_1 \rangle + \langle t, w_2 \rangle = 0$ $\forall\, t \in T \Rightarrow w_1 + w_2 \in T^\perp$

3) $\alpha \in \mathbb{R}$, $w \in T^\perp \Rightarrow \langle t, \alpha w \rangle = \alpha \langle t, w \rangle = 0 \quad \forall\, t \in T$ $\Rightarrow \alpha w \in T^\perp$. Pertanto $T^\perp$ è un sottospazio vett. di V.

• $w \in (\operatorname{span} T)^\perp \Rightarrow \langle t, w \rangle = 0 \quad \forall\, t \in \operatorname{span} T \Rightarrow w \in T^\perp$ perché $T \subset \operatorname{span} T$.

$w \in T^\perp$, $v \in \operatorname{Span} T \Rightarrow \exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $t_1, \dots, t_k \in T$ t.c.

$v = \sum_{i=1}^k \alpha_i t_i \Rightarrow \langle v, w \rangle = \langle \sum_{i=1}^k \alpha_i t_i, w \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle t_i, w \rangle = 0$

$\Rightarrow w \in (\operatorname{Span} T)^\perp$.

- $u \in U \cap U^\perp \Rightarrow \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0_V \Rightarrow$ la somma $U + U^\perp$ è <u>diretta</u>. $U \perp U^\perp$ ovvio.

<u>**Lemma**</u> Sia V uno spazio vettoriale Euclideo e sia $v = (v_1, \dots, v_n)$ una base per V. Allora la matrice del prodotto scalare è simmetrica e ha rango $n = \dim V$.

<u>Dim</u> $b_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$, $i, j = 1, \dots, n \rightsquigarrow B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

$X \in \operatorname{Ker} L_B \Rightarrow BX = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow {}^tX B X = 0$

Posto $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, dove $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X$, si ha

$\langle v, v \rangle = {}^tX B X = 0 \Rightarrow v = 0_V \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow$

$\operatorname{Ker} L_B = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \Rightarrow \operatorname{rg} B = n$.

<u>OSS</u> In altre parole, il prodotto scalare ha rango massimo.