LOGICA

Lezioni 9: Logica dei Predicati 2

Laura Nenzi

DIA – Università degli Studi di Trieste

Contenuti della lezione

- Logica dei predicati o del primo ordine:
  - Soddisfacibilità
  - Modelli
  - Equivalenza semantica
  - Forma normale prenessa
  - Forma di Skolem

Soddisfacibilità

- P fbf è **soddisfatta** in una struttura S rispetto all'ambiente ξ, se $v(s,\xi)(P) \ = 1$ (scriveremo $(S,\xi) \vDash P$) .
- P fbf è **soddisfacibile in $\boldsymbol{S}$** se esiste un ambiente ξ tale che $(S,\xi) \vDash P$
- P fbf è **soddisfacibile** se esiste una struttura S tale che P è soddisfacibile in S
- P fbf è **vera in $\boldsymbol{S}$** se per ogni ambiente ξ si ha $(S,\xi) \vDash P$. In tal caso diciamo che S è un **modello** per P e scriviamo S $\vDash P$
- P fbf è **valida** se è vera in ogni struttura (scriveremo $\vDash P$)

Osservazione

- Formula valida predicativa corrisponde alla tautologia proposizionale.
- Logica proposizionale:
  - per verificare una tautologia possiamo utilizzare la definizione di interpretazione (o la tavola di verità).
- Logica predicativa:
  - dovremo usare la nozione di teorema (calcolo), la semantica non è sufficiente.

Insieme soddisfacibile

- Γ insieme di fbf è **soddisfacibile** se esiste una struttura S e un ambiente ξ tali che per ogni formula $P \in \Gamma$ si ha $(S, \xi) \vDash P$

- S è un **modello** di Γ se S è un modello per ogni $P \in \Gamma$ (scriveremo $S \vDash \Gamma$)

- Γ è **valido** se ogni struttura è un modello di Γ (scriveremo $\vDash \Gamma$)

Conseguenza semantica

- Dati un insieme di fbf Γ e una formula P, diremo che P è una **conseguenza semantica** di Γ ($\Gamma \vDash P$) se per ogni struttura S e per ogni ambiente ξ tali che
  - per ogni $Q \in \Gamma$ si ha $(S, \xi) \vDash Q$
  - Si ha anche che $(S, \xi) \vDash P$

Insoddisfacibile

- Una fbf P è **falsa in una struttura** S sse non è soddisfacibile in S ($S \nvDash P$) sse non esiste nessun ambiente ξ t.c. $(\mathrm{S}, \xi) \vDash P$

- Una fbf P è **insoddisfacibile** (o **contraddittoria**) sse è falsa in ogni struttura.

Paradosso del barbiere

- In un paese esiste un solo barbiere
- Il barbiere rade tutti e solo coloro che non si radono da soli.
- Chi rade il barbiere?
- **Il barbiere non si rade** da solo poiché lui rade solo chi non si rade da solo.
- Ma se non si rade da solo deve essere rasato dal barbiere!
- La definizione di barbiere è contraddittoria.

Paradosso del barbiere

- Formalizziamo la definizione di barbiere: z
  - R(x,y) = “x rade y”
  - b = barbiere
- Il barbiere rade tutti coloro che non si radono da soli:
  - $\forall x(\neg R(x,x) \rightarrow \; R(b,x))$
- Il barbiere rade solo coloro che non si radono da soli:
  - $\forall x(R(b,x) \rightarrow \neg R(x,x))$

Paradosso del barbiere

- Il barbiere rade tutti e solo coloro che non si radono da soli:
  - $\forall x(R(b,x) \leftrightarrow \neg R(x,x))$
- È insoddisfacibile (è falsa in ogni struttura)
- **Dim**: Sia S una struttura qualsiasi
- $v^{(S,\xi)}\left(\forall x\left(R(b,x) \leftrightarrow \neg R(x,x)\right)\right) =$

  $= \min\{v^{(S,\xi[a/x])}(R(b,x) \leftrightarrow \neg R(x,x)) \mid a \in D\} = 0.$

  Per b $(I(b) \in D)$ otteniamo:
  - $R(b,b) \leftrightarrow \neg R(b,b)$ è sempre falso!
- La definizione di Barbiere è contraddittoria: non esiste nessun barbiere con tale definizione! Da questo deriva il paradosso.

Proprietà

- P è valida sse $\neg P$ è insoddisfacibile
- P è soddisfacibile sse $\neg P$ non è valida
- $\boldsymbol{\Gamma \vDash P\ sse\ \Gamma\ \cup\ \{\neg P\}}$ **è insoddisfacibile**
- P non è valida
  - è equivalente a dire $\neg P$ è soddisfacibile
  - **non** è equivalente a dire che P è insoddisfacibile ovvero che $\neg P$ è valida!!!

Osservazione

- Per dimostrare la soddisfacibilità di una formula basta esibire un particolare modello per essa
- Per dimostrare la validità è necessario considerare tutte le possibili interpretazioni della formula -> la semantica non ci aiuta molto
- Per dimostrare la non validità di una formula è suffucuente esibire una interpretazione che non soddisfa P

Lemma di Soddisfacibilità

- Il seguente lemma stabilisce la relazione tra la definizione di soddisfacibilità e il significato intuitivo dei connettivi.
- **Lemma** Per ogni fbf P e Q ed ogni interpretazione (S, ξ) con $S = (D, I)$:
  1. $(S, \xi) \vDash P \wedge Q \ sse \ (S, \xi) \vDash P \ e \ (S, \xi) \vDash Q$
  2. $(S, \xi) \vDash P \vee Q \ sse \ (S, \xi) \vDash P \ o \ (S, \xi) \vDash Q$
  3. $(S, \xi) \vDash \neg P \ sse \ (S, \xi) \vDash P$
  4. $(S, \xi) \vDash P \rightarrow Q \ sse \ (S, \xi) \nvDash P \ o \ (S, \xi) \vDash Q$
  5. $(S, \xi) \vDash \forall x P \ sse \ (S, \xi[a/x]) \vDash P \ per \ ogni \ a \in D$
  6. $(S, \xi) \vDash \exists x P \ sse \ (S, \xi[a/x]) \vDash P \ per \ qualche \ a \in D$

Dimostrazione del lemma

4. $(S, \xi) \vDash P \rightarrow Q \; sse \; (S, \xi S) \nvDash P \; o \; (S, \xi) \vDash Q$

- **Dim (⇒)**. Se $(S, \xi) \nvDash P$ abbiamo finito. Se invece $(S, \xi) \vDash P$ allora $v^{(S,\xi)}(P) = 1$. Ma: $1 = v^{(S,\xi)}(P \rightarrow Q) =$ $= \max(1 - v^{(S,\xi)}(P), v^{(S,\xi)}(Q)) = v^{(S,\xi)}(Q)$ e quindi $(S, \xi) \vDash Q$.
- **Dim (⇐)**. Supponiamo per assurdo che $(S, \xi) \nvDash P \rightarrow Q$ ovvero $v^{(S,\xi)}(P \rightarrow Q) = 0 = \max(1 - v^{(S,\xi)}(P), v^{(S,\xi)}(Q))$ e quindi $v^{(S,\xi)}(P) = 1 \; e \; v^{(S,\xi)}(Q) = 0$ che contraddice l'ipotesi.

Dimostrazione del lemma

5. $(S, \xi) \vDash \forall x P \; sse \; (S, \xi[a/x]) \vDash P \; per \; ogni \; a \in D$

Dim

- $(S, \xi) \vDash \forall x P$ sse $\min\{v^{(S,\xi[a/x])}(P) \mid a \in D\} = 1$
- sse per ogni $a \in D$ $v(S, \xi[a/x])(P) = 1$
- sse $(S, \xi[a/x]) \vDash P$ per ogni $a \in D$.
- Per esercizio: dimostrare tutti gli altri casi.

Equivalenza semantica

- Due fbf P e Q sono semanticamente equivalenti ($P \equiv Q$) se per tutte le interpretazioni (S, ξ) di P e Q si ha:
  - $v^{(S,\xi)}(P) = v^{(S,\xi)}(Q)$
- Due fbf P e Q sono equivalenti sse
  - $\models P \leftrightarrow Q$

Proprietà

- Valgono tutte le equivalenze semantiche viste per la logica proposizionale
- Siano P una fbf e z una variabile che **non** occorre in P. Allora:
  - $\exists x P \;\equiv\; \exists z P[z/x]$
  - $\forall x P \;\equiv\; \forall z P[z/x]$

Proprietà

- (Generalizzazione delle leggi di De Morgan) Sia P una fbf:
  - $\neg\exists x P \equiv \forall x \neg P$
  - $\neg\forall x P \equiv \exists x \neg P$
  - $\exists x P \equiv \neg\forall x \neg P$
  - $\forall x P \equiv \neg\exists x \neg P$

Proprietà

- L'ordine dei quantificatori dello stesso tipo è irrilevante:
  - $\exists x \exists y P \equiv \exists y \exists x P$
  - $\forall x \forall y P \equiv \forall y \forall x P$
- Un quantificatore che lega una variabile che non occorre libera nella fbf che si trova nel suo campo d'azione, può essere cancellato:
  - $\forall x P \equiv P \; se \; x \notin FV(P)$
  - $\exists x P \equiv P \; se \; x \notin FV(P)$

Proprietà

- Sia P e Q fbf:
  - $\forall x(P \land Q) \equiv \forall xP \land \forall xQ$
  - $\exists x(P \lor Q) \equiv \exists xP \lor \exists xQ$
  - $\forall x(P \lor Q) \equiv \forall xP \lor Q \ se \ x \notin FV(Q)$
  - $\exists x(P \land Q) \equiv \exists xP \land Q \ se \ x \notin FV(Q)$
- Osservazione, in generale:
  - $\forall x(P \lor Q) \not\equiv \forall xP \lor \forall xQ$
  - $\exists x(P \land Q) \not\equiv \exists xP \land \exists xQ$

Esempio

- Per ogni intero x, x è pari o x è dispari:
  - $\forall x(P(x) \lor D(x))$
- Ogni intero x è pari o ogni intero x è dispari:
  - $\forall x P(x) \lor \forall x D(x)$

Esempio

- Esiste un intero $x\ t.c.\ x$ è pari e x è dispari:
  - $\exists x(P(x) \wedge\ D(x))$
- Esiste un intero x che è pari ed esiste un intero x che è dispari:
  - $\exists x P(x) \wedge \exists x D(x)$

Proprietà

- Basta ridenominare le variabili!
- Sia P e Q fbf, z una **nuova** variabile e $\mathfrak{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$:
  - $\mathfrak{Q}_1 x\ P \vee \mathfrak{Q}_2 x Q \equiv \mathfrak{Q}_1 x \mathfrak{Q}_2 z (P \ \vee\ Q[z/x])$
  - $\mathfrak{Q}_1 x P\ \wedge \mathfrak{Q}_2 x Q \equiv \mathfrak{Q}_1 x \mathfrak{Q}_2 z (P\ \wedge\ Q[z/x])$
- Esempio:
  - $\forall x \left(P(x) \wedge Q(x)\right) \vee\ \exists x \left(Q(x) \wedge\ P(y)\right)$
  - $\equiv\ \forall x\ \exists z\ ((P(x) \wedge Q(x))\ \vee\ (Q(z)\ \wedge\ P(y)))$

Proprietà

- Sia P e Q fbf e $x \notin FV(Q)$:
  - $\forall xP \rightarrow Q \equiv \exists x(P \rightarrow Q)$
  - $\exists xP \rightarrow Q \equiv \forall x(P \rightarrow Q)$
  - $Q \rightarrow \exists xP \equiv \exists x(Q \rightarrow P)$
  - $Q \rightarrow \forall xP \equiv \forall x(Q \rightarrow P)$
- Nel caso $x \in FV(Q)$ basta ridenominare la variabile x in P con una nuova
- Es: $\forall xA(x) \rightarrow B(x) \equiv \forall yA(y) \rightarrow B(x) \equiv \exists y(A(y) \rightarrow B(x))$

Forme normali prenesse

- Una fbf P è in forma normale prenessa se ha la forma:
  - $\mathfrak{Q}_1 x_1 \mathfrak{Q}_2 x_2 \dots \mathfrak{Q}_n x_n P'$
  - con $\mathfrak{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ e P' non contiene quantificatori.
- Es: $\forall y \exists x (A(y) \rightarrow \ B(x))$
- È sempre possibile trasformare una formula in forma normale prenessa

Forme Normali Prenesse (FNP)

- Per trasformare una fbf in forma FNP
  - basta controllare che tutti i quantificatori abbiano variabili diverse tra loro e che abbiano nomi diversi dalle variabili libere, in caso contrario ridenominarle con variabili **nuove**.
  - poi utilizzare le proprietà descritte prima per portare i quantificatori fuori dalla formula

Algoritmo di trasformazione

1. ridenominare, con nomi **nuovi**, tutte le variabili legate che hanno lo stesso nome di alcune variabili libere delle formula.
2. ridenominare, con nomi **nuovi**, tutte le variabili legate che hanno lo stesso nome di altre variabili legate.
3. estrarre i quantificatori fuori dalle formule usando le seguenti regole, con $\mathfrak{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$:
   - $\neg\exists x P \equiv \forall x \neg P \quad e \quad \neg\forall x P \equiv \exists x \neg P$
   - $\mathfrak{Q}_1 x P \lor \mathfrak{Q}_2 y Q \equiv \mathfrak{Q}_1 x \mathfrak{Q}_2 y (P \lor Q)$
   - $\mathfrak{Q}_1 x P \land \mathfrak{Q}_2 y Q \equiv \mathfrak{Q}_1 x \mathfrak{Q}_2 y (P \land Q)$
   - $\forall x P \to Q \equiv \exists x (P \to Q) \quad e \quad \exists x P \to Q \equiv \forall x (P \to Q)$
   - $P \to \exists x Q \equiv \exists x (P \to Q) \quad e \quad P \to \forall x Q \equiv \forall x (P \to Q)$

Correttezza dell'algoritmo

- Le regole del passo 3 dell'algoritmo sono corrette poiché
  - tutti i parametri dei quantificatori sono diversi (per il passo 2)
  - non ci sono variabili libere con lo stesso nome di variabili legate (per il passo 1)
  - posso quindi usare le equivalenze discusse prima in quanto le loro ipotesi sono vere.

Esempio

- $\forall x A(x) \rightarrow \neg \forall x B(x)$
- $\forall x A(x) \rightarrow \neg \forall y B(y)$
- $\forall x A(x) \rightarrow \exists y \neg B(y)$
- $\exists x (A(x) \rightarrow \exists y \neg B(y))$
- $\exists x \exists y (A(x) \rightarrow \neg B(y))$

Esempio

1. $\exists x\left(A(x) \vee C(y)\right) \rightarrow \neg\,(\forall x\, A(x) \wedge (\exists x\, B(x) \rightarrow \exists y \neg B(y)))$
2. $\exists x\,(A(x) \vee C(y)) \rightarrow \neg(\forall z\, A(z) \wedge (\exists k\, B(k) \rightarrow \exists h \neg B(h)))$
3. $\exists x\left(A(x) \vee C(y)\right) \rightarrow \neg\left(\forall z\, A(z) \wedge\ \forall k\, \left(B(k) \rightarrow \exists h \neg B(h)\right)\right)$
4. $\exists x\left(A(x) \vee C(y)\right) \rightarrow \neg\left(\forall z\, A(z) \wedge\ \forall k \exists h\, \left(B(k) \rightarrow \neg B(h)\right)\right)$
5. $\exists x\left(A(x) \vee C(y)\right) \rightarrow \neg \forall z \forall k \exists h\, \left(A(z) \wedge\ \left(B(k) \rightarrow \neg B(h)\right)\right)$
6. $\exists x\left(A(x) \vee C(y)\right) \rightarrow \exists z \exists k \forall h \neg \left(A(z) \wedge\ \left(B(k) \rightarrow \sim B(h)\right)\right)$
7. $\forall x \left(\left(A(x) \vee C(y)\right) \rightarrow \exists z \exists k \forall h \neg \left(A(z) \wedge\ \left(B(k) \rightarrow \neg B(h)\right)\right)\right)$
8. $\forall x \exists z \exists k \forall h\, ((A(x) \vee C(y)) \rightarrow \neg(A(z) \wedge\ (B(k) \rightarrow \neg B(h))))$

Formule di Skolem

- La formula di Skolem è la formula ottenuta eliminando i quantificatori esistenziali introducendo dei simboli di funzione.
- La formula di Skolem:
  - **non** è equivalente a quella originale
  - è soddisfacibile sse lo è quella di partenza.

Esempio 1

- $\exists x A(x)$
  - Esiste un x per cui vale $A(x)$
  - introduco un simbolo di costante c e scrivo: A(c)

Esempio 2

- $\forall x \exists y B(x, y)$
  - Per ogni x esiste un y t.c. vale $B(x, y)$
  - Es: $B(x, y) \; = \; y$ è multiplo di x
  - Quindi per due x diversi posso avere due y diversi (non posso fissare y con una costante).
  - Introduciamo un simbolo di funzione che dipende da x!
  - $\forall x B(x, f(x))$
  - Ha significato diverso ma è ancora soddisfacibile

Forma di Skolem

- Sia $P = \mathfrak{Q}_1 x_1 \mathfrak{Q}_2 x_2 \dots \mathfrak{Q}_n x_n P_1$ una fbf in FNP. Si dice **forma di Skolem** di P (P^s) la fbf così ottenuta su ogni $\exists x_i$:
  - Se $\exists x_i$ non è nello scope (campo di azione) di un ∀ si introduce c (nuova costante) al posto di x_i in P_1 $(P_1[c/x_i])$ e si elimina $\exists x_i$.
  - Se $\exists x_i$ è nello scope di alcuni ∀ ovvero $\mathfrak{Q}_{i,1} x_{i,1} \dots \mathfrak{Q}_{i,n} x_{i,n}$ allora si introduce un nuovo simbolo di funzione $g(x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$ al posto di x_i in P_1 $(P_1[g(x_{i,1}, \dots, x_{i,n}/xi])$ e si elimina $\exists xi$.

Esempio di trasformazione

- Esempio: $\exists x \forall y \forall z \exists t\ B(x, y, z, t)$
  - $\forall y \forall z \exists t\ B(c, y, z, , g(y, z))$

- Esempio:$\forall x \exists z \exists k \forall y\ \Big(\big(A(x) \vee C(h)\big) \rightarrow \neg\big(A(z) \wedge \big(B(k) \rightarrow \neg B(y)\big)\big)\Big)$
  - $\forall x \forall y\ (\big(A(x) \vee C(h)\big) \rightarrow\ \neg(A(f(x)) \wedge\ (B\big(g(x)\big) \rightarrow\ \neg B(y))))$

Teorema di Skolem

- Per ogni fbf P, P è soddisfacibile sse P^s lo è.
- Basta dimostrare che le due regole di eliminazione del quantificatore esistenziale preservano la soddisfacibilità della formula.

Dimostrazione

- **Dim**. Siano $\mathfrak{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ e
  - $R \ = \mathfrak{Q}_1 x_1 \ \dots \ \exists x_t \ \dots \mathfrak{Q}_n x_n \ A(x_1, \dots \ x_t, \dots \ x_n)$
  - $R' \ = \mathfrak{Q}_1 x_1 \dots \mathfrak{Q}_{t-1} x_{t-1} \mathfrak{Q}_{t+1} x_{t+1} \dots \mathfrak{Q}_n x_n A(x_1, \dots, x_{t-1}, f(x_{i,1}, \dots, x_{i,m}), x_{t+1}, \dots \ x_n)$
- dove $\mathfrak{Q}_{i,1}, \dots, \mathfrak{Q}_{i,m}$, sono i $\forall$ che hanno $\exists \ x_t$ nel campo d'azione in R.
- **Caso 1:** sia R insoddisfacibile, allora anche R' lo è. Altrimenti esisterebbe un'interpretazione che è modello per R' ovvero (per il lemma di soddisf.), si avrebbe che per ogni $x_{i,1}, \dots, x_{i,m}$ esiste $f(x_{i,1}, \dots, x_{i,m})$, che verifica:
- $\mathfrak{Q}_{t+1} x_{t+1} \dots \mathfrak{Q}_n x_n A(x_1, \dots, x_{t-1}, f(x_{i,1}, \dots, x_{i,m}), x_{t+1}, \dots \ x_n)$
- Ma questo è assurdo poiché R è insoddisfacibile

Dimostrazione cont.

- **Dim**. Siano $\mathfrak{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ e
  - $R \ = \mathfrak{Q}_1 x_1 \ \dots \ \exists x_t \ \dots \mathfrak{Q}_n x_n \ A(x_1, \dots \ x_t, \dots \ x_n)$
  - $R' \ = \mathfrak{Q}_1 x_1 \dots \mathfrak{Q}_{t-1} x_{t-1} \mathfrak{Q}_{t+1} x_{t+1} \dots \mathfrak{Q}_n x_n A(x_1, \dots, x_{t-1}, f(x_{i,1}, \dots, x_{i,m}), x_{t+1}, \dots \ x_n)$
- dove $\mathfrak{Q}_{i,1}, \dots, \mathfrak{Q}_{i,m}$, sono i $\forall$ che hanno $\exists\ x_t$ nel campo d'azione in R.
- **Caso 2:** sia R soddisfacibile, allora anche R' lo è. Sia (S, ξ) un modello per R. $x_{i,1}, \dots, x_{i,m}$ in D esiste x_t in D che verifica:
  - $\mathfrak{Q}_{t+1} x_{t+1} \dots \mathfrak{Q}_n x_n A(x_1, \dots, x_{t-1}, f(x_{i,1}, \dots, x_{i,m}), x_{t+1}, \dots \ x_n)$
- Ma ponendo $f^S(x_{i,1}, \dots, x_{i,m}) = \ x_t$ abbiamo un modello per R'

Chiusura

- Ricordiamo che una fbf P è **chiusa** se $FV(P) = \emptyset$, **aperta** altrimenti.

- Data una fbf P. Sia $FV(P) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Si definisce
  - **chiusura universale** di P, $Cl(P) = \forall x_1, \dots, x_k P$.
  - **chiusura esistenziale** di P, $Ex(P) = \exists x_1, \dots, x_k P$.

- Lemma:$S \vDash P$ sse $S \vDash Cl(P)$

- Teorema: Sia P una formula ben formata, P è soddisfacibile se e solo se $Ex(P)$ lo è.

Forma di Skolem di fbf aperte

- Se P è una fbf aperta possiamo trasformarla in una fbf chiusa e in forma di Skolem.
- Algoritmo:
  - sia $FV(P) = \{x_1, \dots, x_n\}$ allora porre $P' = Ex(P) = \exists x_1, \dots, x_n\ P$
  - trasformare P' in forma di Skolem