LOGICA

Lezione 10: Calcolo del primo ordine

Laura Nenzi

DIA – Università degli Studi di Trieste

Contenuti della lezione

- Calcolo del primo ordine:
  - Deduzione naturale
  - Tableau
  - Sequenti
  - Traduzione dal linguaggio naturale

Teorema di Church

- Nella logica predicativa:
  - Non possiamo ispezionare una tavola di verità: abbiamo infinite interpretazioni!
  - Il calcolo è indispensabile.
- Teorema di Church
  - La nozione di verità logica è **indecidibile**.
  - Ovvero non esiste un algoritmo che, data una formula predicativa P, termini sempre dicendo che P è vera o meno.

Semidecidibilità

- Il calcolo predicativo è **semidecidibile**.
- Ovvero data una formula predicativa P:
  - se P è vera allora il calcolo terminerà sempre dicendo che P è vera.
  - se P non è vera allora il calcolo potrebbe non terminare mai, se termina dice che P non è vera.

Calcolo predicativo

- Verranno aggiunte delle regole al calcolo proposizionale.
- Le regole aggiunte saranno per i due quantificatori:
  - *Deduzione naturale*: eliminazione e introduzione di ∀ e ∃
  - *Tableau*: regole “positive” e negative”” di ∀ e ∃.
  - *Sequenti*: regole per l’introduzione a destra e a sinistra di ∀ e ∃

Precisazione

- assumiamo di identificare sintatticamente formule che differiscono soltanto per la ridenominazione di variabili legate.

- $\forall xA$ e $\forall yA[y/x]$ sono considerate sintatticamente indistinguibili

Deduzione naturale

- $(\forall i)$ $\dfrac{P[y/x]}{\forall x P}$ y non compare libera nelle foglie derivate da $P[y/x]$
- $(\forall e)$ $\dfrac{\forall x P}{P[t/x]}$ t termine arbitrario
- $(\exists i)$ $\dfrac{P[t/x]}{\exists x P}$ t termine arbitrario
- $(\exists e)$ $\dfrac{\exists x P \qquad \begin{matrix}[P[y/x]] \\ Q\end{matrix}}{Q}$ y non compare libera nelle foglie derivate da $P[y/x]$

Esempio di deduzione

- $\neg\exists xP \;\equiv\; \forall x\neg P$
- $\neg\exists xP \vdash \forall x\neg P$
- $\forall x\neg P \vdash \neg\exists xP$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists xP \qquad \dfrac{[P(a)]}{\exists xP}}{\perp}}{\neg P(a)}}{\forall x\neg P}$$

Tableau Analitici

- $(\forall)$ $\dfrac{\forall x A(x)}{A(t)}$
- $(\neg\forall)$ $\dfrac{\neg(\forall x A(x))}{\neg A(a)}$
- $(\exists)$ $\dfrac{\exists x A(x)}{A(a)}$
- $(\neg\exists)$ $\dfrac{\neg(\exists x A(x))}{\neg A(t)}$

Esempio di Tableau

- Esiste un uomo t.c. se lui è con il cappello allora tutti sono con il capplello

$\vdash \exists x (C(x) \to \forall y\, C(y))$

$\neg \exists x (C(x) \to \forall y\, C(y))$

$\neg (C(a) \to \forall y\, C(y))$

$C(a)$

$\neg \forall y\, C(y)$

$\neg C(b)$

$\neg (C(b) \to \forall y (C(y)))$

$C(b)$

$\neg \forall y\, C(y)$

Calcolo dei sequenti

- $(\exists l)$ $\dfrac{\Gamma, P[y/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x P \vdash \Delta}$
- $(\exists r)$ $\dfrac{\Gamma \vdash P[t/x], \exists x P, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x P, \Delta}$
- $(\forall l)$ $\dfrac{\Gamma, \forall x P, P[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x P \vdash \Delta}$
- $(\forall r)$ $\dfrac{\Gamma \vdash P[y/x], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x P, \Delta}$

Osservazione

- Nelle regole $(\exists l)$ e $(\forall r)$:
  - la variabile y deve essere **nuova** (non esistente nella formula)
- Nelle regole $(\exists r)$ e $(\forall l)$:
  - Il termine t deve essere scelto tra i **vecchi** se ce ne sono. Altrimenti ne prendiamo uno nuovo (es. una var nuova)
  - non si scelgono le variabili legate
  - si scelgono solo le variabili libere e gli altri termini

Osservazione

- Nelle regole $(\exists r)$ e $(\forall l)$: c'è la ricopiatura della formula quantificata.
- Questo rende i sequenti reversibili:
  - ovvero la conclusione è semanticamente valida sse lo sono le premesse.
- Ma il calcolo può rivelarsi infinito!

Esempio

$$\dots$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{A(r), A(s), A(t), \forall x\, A(x) \vdash \forall x\, (A(x) \wedge B)}}{A(s), A(t), \forall x\, A(x) \vdash \forall x\, (A(x) \wedge B)}}{A(t), \forall x\, A(x) \vdash \forall x\, (A(x) \wedge B)}}{\forall x\, A(x) \vdash \forall x\, (A(x) \wedge B)}$$

- potrebbe andare avanti all'infinito.

Criterio di equità

- Criterio di equità:
  - Nell'esplorare un ramo, nessuna regola deve essere applicata all'infinito.

- Usando questo criterio ogni formula vera verrà dimostrata.

Utilizzo del calcolo

- Come per la logica proposizionale il calcolo dei sequenti può essere usato per:
  - la ricerca di dimostrazioni
  - la ricerca di contromodelli

Ricerca di dimostrazioni

- Per dimostrare che un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è una verità logica:
  - lo si scrive in basso
  - si usano le regole proposizionali e predicative (con il criterio di equità)
  - la ricerca finisce quando si arriva, in tutti i rami della dimostrazione, ad un assioma del tipo $A(t_1, \dots, t_n) \vdash A(t_1, \dots, t_n)$.

Esempio

- $\exists x\,(A(x) \land B(x)) \vdash \exists x\, A(x)$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A(y) \vdash A(y)}{A(y), B(y) \vdash \exists x A(x), A(y)}}{A(y), B(y) \vdash \exists x A(x)}}{A(y) \land B(y) \vdash \exists x A(x)}}{\exists x\,(A(x) \land B(x)) \vdash \exists x\, A(x)}$$

(y già esistente)

(y non compare libera
nel sequente conlclusione)

Esempio

- $\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(y) \vdash A(y)}{\forall x(A(x) \wedge B(x)), A(y), B(y) \vdash A(y)}}{\forall x(A(x) \wedge B(x)), A(y) \wedge B(y) \vdash A(y)}}{\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash A(y)}}{\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x\, A(x)}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B(y) \vdash B(y)}{\forall x(A(x) \wedge B(x)), A(y), B(y) \vdash B(y)}}{\forall x(A(x) \wedge B(x)), A(y) \wedge B(y) \vdash B(y)}}{\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash B(y)}}{\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x B(x)}
}{\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)}
$$

Ricerca di contromodelli

- Si procede come per la ricerca di dimostrazioni.
- Si considerano solo due tipo di rami:
  - quelli che terminano senza arrivare ad un assioma.
  - quelli che non terminano nonostante l’uso del criterio di equità.

Rami che terminano

- Abbiamo lo stato terminale con fallimento quando:
- ci sono solo formule atomiche o quantificatori universali prima di $\vdash$ o esistenziali dopo di $\vdash$
- sono state fatte tutte le possibili istanziazioni $A(t/x)$, con termini t presenti nel ramo, per i quantificatori universali prima di $\vdash$ ed esistenziali dopo di $\vdash$.

Contromodello

- Struttura $S = (D, I)$ e ambiente ξ^S
- D = {tutti i termini, tranne le variabile legate, nel ramo}
- $\xi^S\,(x) = x$ per tutte le variabili libere nel ramo
- $I(c) \ = \ c$ per tutte le costanti nel ramo
- $I(f(t_1, t_2, \dots, t_n)) \ = \ f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ per tutte le funzioni nel ramo
- $I(A(t_1, t_2, \dots, t_n)) = \ 1$ sse $A(t_1, t_2, \dots, t_n)$ compare a sinistra di$\vdash$.

Esempio

- $\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \vdash \exists x A(x) \to \forall x B(x)$

$$\begin{array}{c}
\forall x(A(x) \to B(x)), B(y), A(y) \vdash B(z), A(z) \\ \hline
\forall x(A(x) \to B(x)), B(y), A(z) \to B(z), A(y) \vdash B(z) \; .... \\ \hline
\forall x(A(x) \to B(x)), A(y) \to B(y), A(z) \to B(z), A(y) \vdash B(z) \\ \hline
\forall x(A(x) \to B(x)), A(y) \vdash B(z) \\ \hline
\forall x(A(x) \to B(x)), A(y) \vdash \forall x B(x) \\ \hline
\forall x(A(x) \to B(x)), \exists x A(x) \vdash \forall x B(x) \\ \hline
\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \vdash \exists x A(x) \to \forall x B(x)
\end{array}$$

Esempio

- ramo terminato senza assiomi:
  - $\forall x\big(A(x) \to B(x)\big), B(y), A(y) \vdash B(z), A(z)$

- contromodello
  - $D = \{y, z\}$
  - $\xi^S(y) = y, \xi^S(z) = z$
  - $I(B(y)) = I(A(y)) = 1$
  - $I(B(z)) = I(A(z)) = 0$
  - $\underbrace{\forall x\big(A(x) \to B(x)\big)}_{1} \vdash \underbrace{\exists x A(x) \to \forall x B(x)}_{0}$

Rami che non terminano

- Caso più difficile:
  - bisogna prevedere l’andamento del ramo infinito.
  - Non sempre è possibile trovare un contromodello.
- Vediamo un esempio.

Esempio

- $\exists x A(x), \forall y\big(A(y) \to A(f(y))\big) \vdash$

$$
\begin{array}{c}
A(z), A(f(z)),\ldots, A(f^{i}(z)), \forall y(A(y)\to A(f(y)))\vdash\ldots \\
\hline
\ldots\ldots\ldots \\
\hline
A(z),\forall y(A(y)\to A(f(y))),A(f(z)),A(f(z))\to A(f(f(z)))\vdash \quad \ldots \\
\hline
A(z), \forall y(A(y)\to A(f(y))), A(f(z))\vdash \qquad \ldots \\
\hline
A(z), \forall y(A(y)\ A(f(y))), A(z)\to A(f(z))\vdash \\
\hline
A(z), \forall y(A(y)\to A(f(y)))\vdash \\
\hline
\exists x A(x),\forall y\big(A(y)\to A(f(y))\big)\vdash
\end{array}
$$

-

Esempio

- $A(z), A(f(z)), \ldots, A(f^i(z)), \forall y(A(y) \to A(f(y))) \vdash$
- contromodello:
- $D = \{z, f(z), f(f(z)), \ldots, f^i(z), \ldots\}$
- $\xi^S(z) = z$
- $I(f^i(z)) = f^i(z)\ per\ ogni\ i > 0$
- $I(A(f^i(z))) = 1\ per\ ogni\ i > 0$
- $I(A(z)) = 1$
- $\underbrace{\exists x A(x), \forall y\left(A(y) \to A\left(f(y)\right)\right)}_{1} \vdash$

Esempio

- In realtà potevamo trovare un contromodello più semplice:
- contromodello:
- $D = \{a\}$
- $I(a) = a$
- $I(f(a)) = f(a)$
- $I(A(a)) = 1$
- $\underbrace{\exists x A(x), \forall y \left(A(y) \rightarrow A\big(f(y)\big)\right)}_{1} \vdash$

Traduzione dal linguaggio naturale

- Con il linguaggio logico dei predicati possiamo tradurre molte più frasi del linguaggio naturale
- La traduzione non è però sempre banale

Quantificatore Universale

- Spesso ∀ è abbinato ad una **implicazione**:
  - l'antecedente dell'implicazione restringe l'ambito in cui si applica il quantificatore

- Esempio:
  - Tutti gli uomini sono mortali
  - $U(x)$ = "x è un uomo"
  - $M(x)$ = "x è mortale"
  - $\forall x \, (U(x) \rightarrow M(x))$
  - $U(x)$ restringe l'ambito in cui si applica il ∀

Quantificatore esistenziale

- Spesso $\exists$ è abbinato ad una **congiunzione**:
  - la congiunzione contiene le varie proprietà dell'elemento descritto
- Esempio:
  - Ci sono barbieri che radono se stessi
  - $B(x)\ = $ "x è un barbiere"
  - $R(x, y)$ = "x rade y"
  - $\exists x\ (B(x)\ \land\ R(x, x))$
  - $B(x)$ e $R(x, x)$ sono le proprietà che ha l'elemento x

Esempi

- C'è un libro che non è utilizzato da nessun studente

$$\exists x\ (L(x)\ \wedge\ \forall y\ (S(y) \to \neg U(y,x))$$

oppure $$\exists x\ (L(x)\ \wedge \neg\exists y\ (S(y)\ \wedge\ U(y,x))$$

- Se Ada è più colta di Sara allora almeno un libro di Sara è stato sfogliato da tutti gli amici di Ada

$$PC(a,s) \to (\exists x\ (L(x,s) \wedge (\forall y\ (A(y,a) \to\ S(y,x)))$$