Teorema Sia V uno spazio vettoriale Euclideo, $\dim V < \infty$, e sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale. Allora

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U$$

e quindi $U \oplus U^\perp = V$.

Dim $(v_1, \dots, v_r)$ base di U, $v_{r+1}, \dots, v_n \in V$ t.c. $(v_1, \dots, v_n)$ base di V (completamento della base).
$b_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$, $B = (b_{ij})$ matrice di $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Sia $w = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \in V$. $w \in U^\perp \iff \langle v_i, w \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r$.

$\langle v_i, w \rangle = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} x_j \langle v_i, v_j \rangle = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = 0$
$(i = 1, \dots, r)$.

Quindi $U^\perp : \begin{cases} b_{11} x_1 + \dots + b_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{r1} x_1 + \dots + b_{rn} x_n = 0 \end{cases}$

La matrice del sistema è formata dalle prime r righe di B. Dato che $\operatorname{rg} B = n$, la matrice del sistema ha rango $r \Rightarrow \dim \Sigma = n - r \Rightarrow \dim U^\perp = n - r$.
Quindi $\dim(U \oplus U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp = n = \dim V$
$\Rightarrow U \oplus U^\perp = V$.

Oss V spazio vett. Euclideo, $U \subset V$ sottospazio vett. $\Rightarrow$ U spazio vettoriale Euclideo con la restrizione del prodotto scalare $\langle u_1, u_2 \rangle \quad \forall u_1, u_2 \in U$
(prodotto scalare indotto da V).

Def Sia V uno spazio vettoriale Euclideo, e sia $v \in V$. Il numero $\|v\| \overset{def}{=} \sqrt{\langle v, v\rangle}$ si chiama <u>norma</u> o <u>lunghezza Euclidea</u> di v.

OSS 1) $\|v\|$ ben definita perché $\langle v, v\rangle \geq 0 \ \forall v \in V$

2) $\|v\| = 0 \iff v = 0_V$.

3) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\| \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall v \in V$. Infatti

$$\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v, v\rangle} = |\alpha| \, \|v\|.$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. Allora $\forall v, w \in V$ si ha

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$$

e vale l'uguaglianza $\iff$ v e w sono proporzionali.

Dim 1) se $w = 0_V$ ovvio.

2) $w \neq 0_V \rightsquigarrow \alpha := -\dfrac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle v + \alpha w, v + \alpha w\rangle = \langle v, v\rangle + \alpha \langle v, w\rangle + \alpha \langle w, v\rangle +$$

$$+ \alpha^2 \langle w, w\rangle = \|v\|^2 - \frac{2\langle v, w\rangle^2}{\langle w, w\rangle} + \frac{\langle v, w\rangle^2}{\langle w, w\rangle} = \|v\|^2 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^2}$$

$$\Rightarrow \langle v, w\rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 \Rightarrow |\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$$

e vale l'uguale $\iff v + \alpha w = 0_V \Rightarrow v, w$ proporzionali

Viceversa, se $v = \gamma w$, $\gamma \in \mathbb{R} \Rightarrow |\langle v, w\rangle| = |\gamma| \langle w, w\rangle$.

$\|v\| \, \|w\| = \|\gamma v\| \, \|w\| = \|\alpha w\| \, \|w\| = |\alpha| \, \|w\|^2 = |\langle v, w\rangle|$.

Distanze e angoli

Teorema Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. La norma Euclidea ha le proprietà seguenti:

i) $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$

ii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$

iii) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare).

$\forall v, w \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

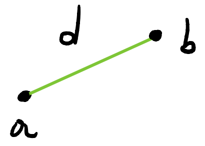
Dim (i) e (ii) già viste.

iii) $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle = \langle v,v \rangle + \langle v,w \rangle + \langle w,v \rangle +$

$+ \langle w,w \rangle = \|v\|^2 + 2\langle v,w \rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \, \|w\| + \|w\|^2$

$= (\|v\| + \|w\|)^2$.

Def Sia V uno spazio vettoriale Euclideo e siano $a, b \in V$ due "punti" (due vettori). Definiamo la distanza Euclidea tra a e b come il numero reale $d(a,b) \overset{def}{=} \|a-b\|$.



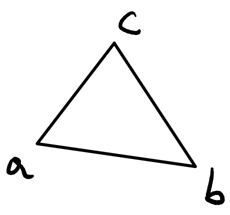
Teorema La distanza Euclidea ha le proprietà seguenti:

i) $d(a,b) \geq 0$ e $d(a,b) = 0 \iff a = b$;

ii) $d(a,b) = d(b,a)$ (simmetria)

iii) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ (disuguaglianza triangolare)

$\forall a, b, c \in V$.



La dimostrazione segue facilmente dal teorema sulla norma.

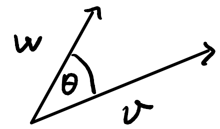
Siano ora $v, w \in V$ due vettori <u>non nulli</u>.

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1$$

Quindi $\exists!\ \theta \in [0, \pi]$ t.c. $\cos\theta = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$

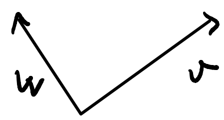
ovvero: $\theta = \arccos \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \in [0, \pi]$.



Def Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. Si chiama angolo di due vettori $v, w \in V - \{0_V\}$ il numero reale

$$\widehat{vw} \overset{def}{=} \arccos \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \in [0, \pi].$$

<u>**OSS**</u> $\widehat{vw} = \frac{\pi}{2}$ (cioè $90°$) $\iff \langle v, w\rangle = 0 \iff v \perp w$.



Def Un insieme di vettori <u>non nulli</u> $(v_1, \ldots, v_k)$ è detto sistema <u>ortogonale</u> se $\langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad \forall i \neq j$. È detto sistema <u>ortonormale</u> se $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j$.

<u>**OSS**</u> $(v_1, \ldots, v_k)$ è ortonormale se è ortogonale e $\|v_i\| = 1$ $\forall i = 1, \ldots, k$.

Def Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. Una base ortogonale (risp. ortonormale) è una base di V fatta di vettori ortogonali (risp. ortonormali).

Es $\mathbb{R}^n$ col prodotto scalare canonico: la base canonica è ortonormale, cioè si ha $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ $\forall i, j = 1, \dots, n$.

Teorema Sia V uno spazio vettoriale Euclideo e sia $(v_1, \dots, v_k)$ un sistema ortogonale di vettori di V. Allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Dim $v_i \neq 0_V$ $\forall i = 1, \dots, k$ (per definizione) $\Rightarrow \|v_i\| \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0_V \Rightarrow \left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_j \|v_j\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j.$$

Teorema di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Sia V uno spazio vettoriale Euclideo e sia $(v_1, \dots, v_r)$ una famiglia di vettori linearmente indipendenti di V. Allora esiste un sistema ortogonale $(u_1, \dots, u_r)$ di vettori di V t.c. $\text{Span}(u_1, \dots, u_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ $\forall k = 1, \dots, r$.

Dim Per induzione su $r \geq 1$.

Base dell'induzione: $r = 1$. Poniamo $u_1 = v_1$.

Ipotesi induttiva: supponiamo che sia vero per ogni scelta di $r-1$ vettori e dimostriamolo per $r \geq 2$ vettori.

Per l'ipotesi induttiva $\exists$ sistema ortogonale $(u_1, \dots, u_{r-1})$ t.c. $\text{Span}(u_1, \dots, u_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ $\forall k = 1, \dots, r-1$. Poniamo

$$u_r = v_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\langle u_i, v_r \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i.$$

$u_r \in \text{Span}(v_r, u_1, \dots, u_{r-1}) = \text{Span}(v_1, \dots, v_r) \Rightarrow$

$\text{Span}(u_1, \dots, u_r) \subset \text{Span}(v_1, \dots, v_r)$

$v_r \in \text{Span}(u_1, \dots, u_r) \Rightarrow \text{Span}(v_1, \dots, v_r) \subset \text{Span}(u_1, \dots, u_r)$

e quindi $\text{Span}(u_1, \dots, u_r) = \text{Span}(v_1, \dots, v_r)$.

$v_1, \dots, v_r$ lin. indip. $\Rightarrow u_1, \dots, u_r$ lin. indip. $\Rightarrow u_r \neq 0_V$

Per $j = 1, \dots, r-1$ si ha:

$$\langle u_j, u_r \rangle = \langle u_j, v_r \rangle - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\langle u_i, v_r \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \langle u_j, u_i \rangle =$$

$$= \langle u_j, v_r \rangle - \frac{\langle u_j, v_r \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} \langle u_j, u_j \rangle = 0$$

$\Rightarrow (u_1, \dots, u_r)$ sistema ortogonale.

<u>Corollario</u> Sia V uno spazio vettoriale Euclideo con $\dim V < \infty$. Allora V ammette una <u>base ortonormale</u>.

<u>Dim</u> $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base di $V \rightsquigarrow \mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ sistema ortonormale $\Rightarrow V = \text{Span}(u_1, \dots, u_n)$ e quindi $\mathcal{U}$ è base per V. Poniamo $t_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$, $i = 1, \dots, n$.

Allora $\|t_i\| = 1$ e $\langle t_i, t_j \rangle = \delta_{ij}$ $\forall i, j$. Quindi $(t_1, \dots, t_n)$ è una base ortonormale per V.

<u>Es</u> $U \subset \mathbb{R}^4$, $U: x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$, $\mathbb{R}^4$ col prodotto scalare canonico. Trovare base ortonormale di U. Troviamo intanto una base. $\dim U = 3$,
$$\begin{cases} x_1 = t_1 - t_2 + 2t_3 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \end{cases}$$

Diamo a (t_1, t_2, t_3) risp. i valori $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{base di } U$$

non sono ortogonali infatti $\langle v_1, v_2 \rangle = -1$

Usiamo Gram-Schmidt.

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle u_1, v_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, v_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\frac{3}{\cancel{2}}} \frac{1}{\cancel{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$t_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(t_1, t_2, t_3) base ortonormale per U.