NON-ABELIAN FIELDS

$$\mathcal{L} = \bar\Psi \, i \not{D} \psi = \bar\Psi_i \, i \gamma^\mu (\partial_\mu \delta^{ij}) \psi_j$$

$U(1)_{A,V}$
$SU(N)_{A,V}$
$N = \dim R$

Campi ψ stanno in una rap R di G

$$\Rightarrow \quad j^{\mu a} = \bar\Psi \gamma^\mu t_R^a \psi$$

$a \in$ Adj rap.

$$j_A^{\mu a} = \bar\Psi \gamma^\mu \gamma_5 t_R^a \psi \qquad P = \bar\Psi \gamma_5 t_R^a \psi$$

In questa situazione ci sono correlatori a più punti che contribuiscono all'anomalia (cioè $\langle \underbrace{j \cdots j}_{n} \rangle$ con $n \geqslant 3$)

$$T^{abc\,\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = i \int dx\, dy\; e^{ik_1 x + i k_2 y} \langle j^{a\mu}(x)\, j^{b\nu}(y)\, j_A^{c\lambda}(0) \rangle$$

$$T^{abc\,\mu\nu} \;\; = \;\; '' \qquad P^c(0)$$

$\downarrow$

$$\text{AWI}: \quad q_\lambda T^{abc\,\mu\nu\lambda} = 2m\, T^{abc\,\mu\nu}_{(m)} - \underbrace{\frac{C^{abc}}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta}}_{\text{ABJ anomaly per il caso non-abeliano}}$$

$$C^{abc} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_R \{ t_R^a, t_R^b \} t_R^c$$

Se manteniamo la CORRENTE ASSIALE ABELIANA $j_A^\lambda = \bar\Psi \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ (j_A^λ è un "color singlet", cioè in rap. triviale di G),

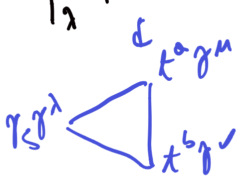
legata a simm. $\psi \mapsto e^{i\gamma_5 \beta} \psi$

e quella vett. non-ab. $j_V^{\mu a} = \bar\Psi \gamma^\mu t_R^a \psi$

(mentre $j_A^{\lambda a} = \bar\Psi \gamma^\mu \gamma_5 t_R^a \psi$ è legata a $\psi \mapsto e^{i\gamma_5 \beta^a t_R^a} \psi$)

allora:

$$q_\lambda T^{ab\,\mu\nu\lambda} = 2m\, T^{ab\,\mu\nu} - \frac{c(R)\, \delta^{ab}}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} \qquad (*)$$



$\operatorname{Tr}(t^a t^b \mathbb{1})$

Accoppiamo la corrente vettoriale $j^{\mu a}$ a un campo di gauge non-abeliano A_μ^a. L'anomalia (*) produrrà ancora termini del tipo $(\partial_\xi A_\beta^a)^2$. Come contribuiscono ~~le altre~~ gli altri termini dell' WI anomale?

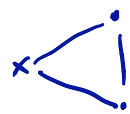
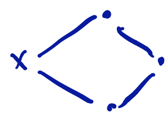
Devono contribuire in maniera consistente col fatto che $\partial_\lambda j_A^\lambda$ è un SINGOLETTO sotto G

$$\langle \partial_\lambda j_A^\lambda \rangle_A = -\frac{c(R)\,\delta^{ab}}{16\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^b \qquad (m=0)$$

SINGLET ANOMALY

$$= -\frac{1}{16\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$$

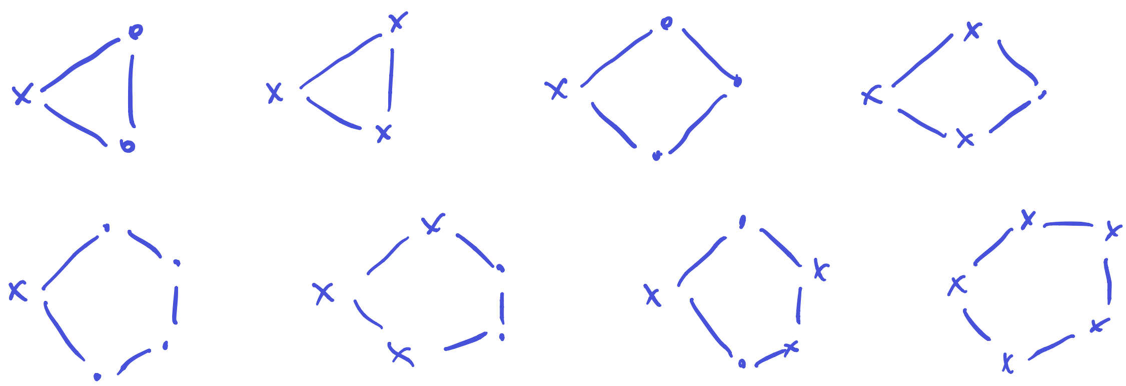
$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\delta^{ab}F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^b$

- $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu A_\nu^a \partial_\alpha A_\beta^a \rightarrow$  triangolo
- $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu A_\nu^a A_\alpha^c A_\beta^d f^{bcd} \rightarrow$  quadrato
- $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\mu^c A_\nu^d A_\alpha^e A_\beta^f \underbrace{f^{ecd} f^{aef}}$

$$= \# \left(f^{acd} f^{aef} + f^{aed} f^{afc} + f^{afd} f^{ace} \right) = 0 \quad \text{Jacobi id.}$$

Se anche la corrente assiale viene presa non-ab. $j_A^{\lambda a} = \bar\psi \gamma^\mu \gamma_5 t_R^a \psi$

$\Rightarrow$ molti diagrammi contribuiscono $\rightarrow$ molte WI sono anomale nella teoria libera



Se accoppiamo $j^{\mu a}$ a A_μ^a :

$$\langle (D_\mu j_A^\mu)^a \rangle = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \, tr\left(t^a F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right) \qquad (*)$$

COVARIANT ANOMALY

Finora abbiamo sempre accoppiato A_μ^a alla CORRENTE VETT.,
cioè abbiamo GAUGIATO la simmetria preservata.
Infatti se la simm. di gauge è ANOMALA la teoria quantistica risulta INCONSISTENTE: 1) perdiamo la relazione di equivalenza necessaria per tener conto della ridondanza della descrizione 2) alcune proprietà come la rinormalizzabilità e l'unitarietà vengono violate.

Campi chirali

Pensiamo di accoppiare correnti R-handed e L-handed a diversi campi vett. A_μ^R e A_μ^L.

Otteniamo:

$$\langle (D_\mu^H j^{H\mu})^a \rangle = \eta_H \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \, tr\left(t^a \partial_\mu \left(A_\nu^H \partial_\rho A_\sigma^H + \frac{i}{2} A_\nu^H A_\rho^H A_\sigma^H \right) \right)$$

$H = L, R$

CONSISTENT ANOMALY

$$\eta_H = \begin{cases} -1 & H = L \\ +1 & H = R \end{cases}$$

Notiamo che otteniamo lo stesso risultato formale (a meno del segno) per L e R.

Esiste anche un altro tipo di anomalia COVARIANT ANOMALY

per correnti L, R (diversa regolarizzazione rispetto a CONSIST. AN.)

$$\langle (D_\mu j^{H\mu})^a \rangle = \eta_H \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{tr}\left(t^a F^H_{\mu\nu} F^H_{\rho\sigma}\right) \qquad H = L, R$$

$$j^{L/R\,\mu\,a} = \bar\psi \gamma^\mu t^a \left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2}\right)\psi = \frac{1}{2}\left(j^{\mu a} \pm j_A^{\mu a}\right)$$

$$A_\mu^{L/R} = A_\mu^V \pm A_\mu^A$$

In $\mathcal{L}$

$\sim j^{L\mu a} A_\mu^{aL} + j^{R\mu a} A_\mu^{aR}$

$\Leftrightarrow j^\mu A_\mu^{aV} + j_A^\mu A_\mu^{aA}$

$\hookrightarrow$ se $A_\mu^A \equiv 0 \Rightarrow A_\mu^{L/R} = A_\mu$

e $\langle (D_\mu j_A^\mu)^a \rangle = \langle (D_\mu j^{L\mu})^a \rangle - \langle (D_\mu j^{R\mu})^a \rangle =$

$$= 2\left[-\frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{tr}\left(t^a F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}\right)\right] = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon\, \mathrm{tr}(tFF)$$

cioè (*).