Corso di GEOMETRIA - Simulazione prova scritta
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di rango di una matrice.
Si enunci e si dimostri il Teorema di Rouché - Capelli per sistemi lineari.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito da

$$\boxed{f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1+0-0 \\ -2\cdot 1 - 2\cdot 0 + 2\cdot 0 \\ -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi. f è un isomorfismo?

$\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg} f = \mathrm{rg} A$, $\quad \dim \ker f = n - \mathrm{rg} f = 3 - \mathrm{rg} A$

$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, \tilde{A}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + \text{I}]{\text{II} + 2\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{II}} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 righe non nulle $\Rightarrow \mathrm{rg}\, \tilde{A} = \mathrm{rg}\, A = 2 = \dim \mathrm{Im} f \Rightarrow \dim \ker f = 3-2=1$

Per trovare basi: ricordo che generatori per $\mathrm{Im} f$ sono $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$

$\Rightarrow \ldots$ base di $\mathrm{Im} f$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\ker f$: eq. cartesiane: $A \cdot X = 0$: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

gen. soluz. $\begin{pmatrix} t/2 \\ t/2 \\ t \end{pmatrix}$, una soluz. non nulla: $t = 2$

$\ker f = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(c) **(3 punti)** Si determini il sottoinsieme delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, dove $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$.

Matrice completa

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \ldots = 2 = \mathrm{rg} A$$

è compatibile,

risolvo il sistema e trovo la generica soluzione è $\begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 1+2t \end{pmatrix}$, opp. $\begin{pmatrix} 1/2 + t/2 \\ 1/2 + t/2 \\ t \end{pmatrix}$ $t=0$ $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

$$P_B(x) = \det\left(B - x \cdot \mathbb{I}_3\right) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 0 & -1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ -1 & 0 & 2-x \end{pmatrix} \underset{\text{Laplace 2ª riga}}{=} (1-x)\det\begin{pmatrix} 2-x & -1 \\ -1 & 2-x \end{pmatrix}$$

$$= (1-x)\left((2-x)^2 - 1\right) = (1-x)\left(x^2 - 4x + 4 - 1\right) =$$

$$= (1-x)(x^2 - 4x + 3) = (1-x)(x-1)(x-3) = -(x-1)(x-1)(x-3)$$

$$= -(x-1)^2 \cdot (x-3)$$

$$\Rightarrow Sp B = \{1, 3\}, \quad m_a(1) = 2, \quad m_a(3) = 1$$

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

2 autospazi V_1 e V_3

$\dim V_1 = m_g(1) = m_a(1) = 2$, $\dim V_3 = m_g(3) = m_a(3) = 1$

~~~ . ~~

f è op. simmetrico (opp. B simmetrica)

$\xRightarrow{\text{Teo. Spettrale}}$ f è diagonalizzabile $\overset{\Longleftrightarrow}{\Longrightarrow}$ Secondo Criterio di diag.

- $p_f(x)$ è prodotto di fattori lineari
- $\forall \lambda \in Sp(f)$, si ha $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

dove $m_g(\lambda) := \dim V_\lambda$

~~~ . . ~~

Ricordo che $V_1 = \ker(L_B - 1 \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$

$$\overset{!}{=} \ker(B - 1 \cdot I_3)$$

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad rg = 1$$

eq. per. V_1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x_1 - x_3 = 0$

piano vettoriale

$x_1 - x_3 = 0$ base: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} t \\ s \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oss. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ sono ortogonali

Per trovare base ortonormale di V_1, basta controllare che siano di norma 1, e se non lo sono, li NORMALIZZO

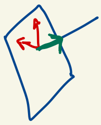
$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ cons. $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

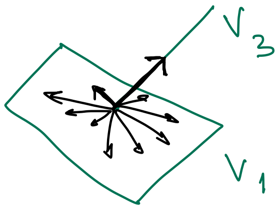
$$\left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1 \qquad \text{ok.}$$

$\Rightarrow$ base ortonormale di V_1 è $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$



Parentesi: f simmetrica $\Rightarrow$ autovettori relativi a autovalori DIVERSI sono tra loro ORTOGONALI



$$V_3 = \ker(B - 3 \cdot I_3) \; ; \; B - 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eq. per V_3: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x_1 - x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$ retta vettoriale

base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ ortonormale di autovettori per L_B:

$$\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} \right\}$$

in questa base: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$L_B(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$L_B(v_2) = 1 \cdot v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$L_B(v_3) = 3 \cdot v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}\left(Id_{\mathbb{R}^3}\right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}\left(Id_{\mathbb{R}^3}\right) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}\left(Id_{\mathbb{R}^3}\right)\right)^{-1} = {}^t\!\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}\left(Id_{\mathbb{R}^3}\right)\right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ma le matrici P di cambio di base tra basi ORTONORMALI hanno la proprietà: $P^{-1} = {}^tP$ (si chiamano MATRICI ORTOGONALI)

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\left(L_B\right) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id)\cdot \underbrace{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}\left(L_B\right)}_{=B} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}\left(Id_{\mathbb{R}^3}\right)$$

(4) • **(4 punti)** Si trovi un' equazione cartesiana del piano H di $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ passante per i punti $P = (1, 3, 1)$ e $Q = (0, 4, 1)$ e ortogonale al piano L di equazione

$$L: \qquad x + y + z = 37.$$

$H \ni P$, $H \ni Q$ e $H \perp L$

$bx + by + (d-4b)z = d$

$H: \quad ax + by + cz = d$, impongo pass. per P:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 3 + c \cdot 1 = d \\ a \cdot 0 + b \cdot 4 + c \cdot 1 = d \end{cases}$$, imp. pass. per Q:

$$\begin{cases} a + 3b + c = d \\ 4b + c = d \end{cases}$$, $a = d - 3b - c = d - 3b - d + 4b = b$

$c = d - 4b$

$b(x + y - 4z) + d(z - 1) = 0 \rightsquigarrow$ vedi prossimo foglio

• **(4 punti)** Si determini la posizione reciproca delle due rette di $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$

$$r: \begin{cases} x &= 2 + t \\ y &= -1 - t \\ z &= t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x &= 4 + 3\tau \\ y &= -3 + 2\tau \\ z &= 2 \end{cases}$$

Nel caso di complanarità, si trovino delle equazioni parametriche del piano che le contiene.

$b(x+y-4z)+d(z-1)=0$: vettore normale $v_H = \begin{pmatrix} b \\ b \\ d-4b \end{pmatrix}$

$\perp L$: $x+y+z=37$

vettore normale $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_L$

$$H \perp L \iff v_H \cdot v_L = 0 \iff \begin{pmatrix} b \\ b \\ d-4b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= b+b+d-4b = d-2b = 0 \implies d = 2b$$

$$\implies bx+by+(2b-4b)z = 2b$$

$$bx+by-2bz = 2b \quad ; \quad b=1$$

$$\boxed{x+y-2z=2}$$

Altro modo: la giacitura di H deve contenere $v_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e deve contenere $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

deve passare per $Q=(0,4,1) \implies$

$$\begin{cases} x = 0 + t - s \\ y = 4 + t + s \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y-4 \\ 1 & 0 & z-1 \end{pmatrix} = 0$$