PROCESSI STOCASTICI

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ FAMIGLIA DI VARIABILI ALEATORIE

È UN PROCESSO STOCASTICO

TIPICAMENTE $I \subset \mathbb{R}$ INSIEME DI INDICI "TEMPORALI"

* $I = \mathbb{N}$
  PROCESSO STOC. A TEMPO DISCRETO $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$

* $I = [0, +\infty)$ o $I = [0, T]$ (ALTRO)

  " " " CONTINUO $(X_t)_{t \geq 0}$ $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$

ESEMPIO

* X_t = PREZZO DI UN TITOLO ALL'ISTANTE t

* = NUMERO DI SINISTRI RICEVUTI FINO AL TEMPO t

PROCESSI STOCASTICI

* X_t = TEMPERATURA IN CELSIUS AL TEMPO t IN UNA DATA LOCAZIONE

* $X_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ = TEMPERATURA IN UN DATO ISTANTE NELLA LOCAZIONE (α = LATITUDINE, β = LONGITUDINE, γ = ALTEZZA)

* X_n = NUMERO DI DECESSI NEL PERIODO n ($n \mapsto n+1$)

⋮

CASO VETTORIALE

(X_α) FAMIGLIA DI VETTORI DI V.A.

$X_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^{n_\alpha}$

PROCESSI STOCASTICI

TRAIETTORIE:

(X_t) PROCESSO STOCASTICO

PER OGNI $t \geq 0$, X_t V.A.

$$X_t : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}} \quad \text{MISURABILE}$$

$$\omega \qquad\qquad X_t(\omega)$$

PER OGNI $\omega \in \Omega$, LA FUNZIONE

$$t \longrightarrow X_t(\omega)$$

È UNA TRAIETTORIA DEL PROCESSO: FUNZIONE DA $[0,+\infty)$ IN $\mathbb{R}$

IN GENERE SI RICHIEDE REGOLARITÀ SULLE TRAIETTORIE

* MISURABILITÀ
* CONTINUITÀ (A DX, A SX)
* INTEGRABILITÀ

PROCESSI STOCASTICI

CASO $I = [0, +\infty)$ (SIMILE NEL CASO $I = \mathbb{N}$)

INFORMAZIONE DINAMICA:

PER OGNI $t \in I$ ($0 \le t$) SIA $\mathcal{F}_t$ ($\subset \mathcal{F}$) L'INFORMAZIONE DISPONIBILE AL TEMPO t (σ-ALGEBRA)

L'INFORMAZIONE NON VIENE PERSA AL PASSARE DEL TEMPO

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \text{SE} \quad 0 \le s < t$$

UNA FAMIGLIA $(\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$ DI SOTTO σ-ALGEBRE DI $\mathcal{F}$ È UNA FILTRAZIONE SE SODDISFA QUESTA CONDIZIONE

PROCESSI STOCASTICI

~~ESEMPIO~~

UN PROCESSO STOCASTICO $(X_t)_{t\geq 0}$ FA PARTE DELL'INFORMAZIONE $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ SE

X_t È $\mathcal{F}_t$-MISURABILE, PER OGNI $t\geq 0$

("X_t È NOTO AL TEMPO t")

UN PROCESSO COSÌ FATTO SI DICE **ADATTATO** ALLA FILTRAZIONE

SE $0\leq s<t$, ALLORA X_s È $\mathcal{F}_t$-MISURABILE (NOTO IN t)

ESEMPIO: FILTRAZIONE **NATURALE** DEL PROCESSO $(X_t)_{t\geq 0}$

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_u : 0\leq u\leq t)$$

MINIMA FILTRAZIONE RISPETTO CUI (X_t) È ADATTATO

PROCESSI STOCASTICI

$(X_t)_{t\geq 0}$ / $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

(X_t) <u>MARTINGALA</u> RISPETTO A $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

SE

1) (X_t) ADATTATO A $(\mathcal{F}_t)$

2) $X_t \in \mathcal{L}^1 \quad \forall t$

3) PER OGNI $0 \leq s < t$

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \qquad \text{q.c.}$$

"MODELLO DI GIOCO EQUO"

<u>SOTTOMARTINGALA</u> SE

3') $E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$ q.c. $\forall\, 0 \leq s < t$

<u>SOPRAMARTINGALA</u> SE

3'') $E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$ q.c. $\forall\, 0 \leq s < t$

PROCESSI STOCASTICI

(X_t) $(\mathcal{F}_t)$

(X_t) PROCESSO MARKOVIANO RISPETTO A $(\mathcal{F}_t)$ SE

1) (X_t) ADATTATO A $(\mathcal{F}_t)$

2) PER OGNI $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
PER OGNI $0 \leq s < t$
$g(X_t) \in \mathcal{L}^1$

$$E[g(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = E[g(X_t) \mid X_s]$$

q.c.

"FUTURO E PASSATO SONO INDIPENDENTI CONDIZIONATAMENTE AL PRESENTE"

PROCESSI STOCASTICI

$(W_t)_{t \geq 0}$ È UN MOTO BROWNIANO (PROCESSO DI WIENER)

SE

1) $W_0 = 0$ Q.C.

2) $t \to W_t$ CONTINUA, Q.C.

3) PER OGNI $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ SONO INDIPENDENTI (PROCESSO A INCREMENTI INDIPENDENTI)

4) PER OGNI $0 \leq s < t$,

$W_t - W_s \sim N(0, t-s)$

PROCESSI STOCASTICI

$(W_t)_{t\geq 0}$ È UN $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ - MOTO BROWNIANO
SE (W_t) È ADATTATO A $(\mathcal{F}_t)$,
~~SE~~ 1), 2), 4) VALGONO E
3) RIMPIAZZATA DA

3') PER OGNI $0 \leq s < t$,
$W_t - W_s$ INDIP. DA $\mathcal{F}_s$

$(W_t)_{t\geq 0}$ MOTO BROWNIANO ~~A~~ALLORA
È UN $(\mathcal{F}_t^W)$ MOTO BROWNIANO

PROCESSI STOCASTICI

SE (W_t) È UN $(\mathcal{F}_t)$-MOTO BROWNIANO

1) È UNA $(\mathcal{F}_t)$-MARTINGALA

2) È UN $(\mathcal{F}_t)$-PROCESSO DI MARKOV

1) $$E[W_t \mid \mathcal{F}_s] = E[W_t - W_s + W_s \mid \mathcal{F}_s]$$
$$= \underbrace{E[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s]}_{\underbrace{E[W_t - W_s]}_{=0}} + W_s$$

2) $$E[g(W_t) \mid \mathcal{F}_s] = E[g(\underbrace{W_t - W_s}_{\text{IND. DA } \mathcal{F}_s} + \underbrace{W_s}_{\mathcal{F}_s\text{-MIS}}) \mid \mathcal{F}_s]$$
$$= E[g(W_t - W_s + x)]\Big|_{x = W_s} \quad \text{FUNZIONE DI } W_s$$
$$= h(W_s)$$

QUINDI

$$E[g(W_t) \mid W_s] = E\big[E[g(W_t) \mid \mathcal{F}_s] \mid W_s\big]$$
$$= h(W_s) = E[g(W_t) \mid \mathcal{F}_s]$$