CONVERGENZA DI V.A.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (X_n) SUCCESSIONE DI V.A.

X V.A.

$X_n \to X$ Q.C. SE $P\left(\lim_{n \to +\infty} X_n = X\right) = 1$

CONVERGENZA QUASI CERTA

ALTRI CRITERI DI CONVERGENZA

CONVERGENZA IN PROBABILITÀ:

$X_n \xrightarrow{P} X$ SE

PER OGNI $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

CONVERGENZA IN DISTRIBUZIONE (O IN LEGGE)

$X_n \xrightarrow{d} X$ SE

$F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$: F_X È CONTINUA IN x

CONVERGENZA DI V.A.

(X_n) X $\in \mathcal{L}^p$ $p \geq 1$

CONVERGENZA IN $\mathcal{L}^p$

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$ SE

$$\lim_{n \to +\infty} E[|X_n - X|^p] = 0$$

$$d_{\mathcal{L}^p}(X, Y) = E[|X - Y|^p]^{1/p}$$

CONVERGENZA DI V.A.

RELAZIONE TRA I DIVERSI TIPI DI CONVERGENZA

$$
\begin{tikzcd}
X_n \longrightarrow X \text{ q.c.} \arrow[ddr, Rightarrow, shift left] & & X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^s} X \arrow[d, Rightarrow, "\text{con } 1 \leq s < p"] \\
 & & X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & X_n \xrightarrow{p} X \arrow[uul, Rightarrow, shift left, "\text{su una sotto-successione}"'] \arrow[d, Rightarrow, shift right] & \\
 & X_n \xrightarrow{d} X \arrow[u, Rightarrow, shift right, "\text{se } X \text{ degenere}"'] &
\end{tikzcd}
$$

CONVERGENZA DI V.A.

* CONVERGENZA IN DISTRIBUZIONE È UNA PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI DI RIPARTIZIONE, O MEGLIO DELLE MISURE IMMAGINE. SI PUÒ SCRIVERE $F_n \xrightarrow{d} F$
* LE V.A. X_n (NELLA DEFINIZIONE DI CONVERGENZA IN DISTRIBUZIONE) POSSONO ESSERE DEFINITE SU SPAZI DI PROB. DIVERSI

TEOREMA SONO EQUIVALENTI

1) $F_n \xrightarrow{d} F$

2) $\int g(x)\, dF_n(x) \to \int g(x)\, dF(x)$ $\quad n \to +\infty$

PER OGNI g CONTINUA, LIMITATA

$\left(E[g(X_n)] \to E[g(X)] \right)$

3) $P(X_n \in B) \to P(X \in B)$ $\quad n \to +\infty$

PER OGNI $B \in \mathcal{B}$: $P(X \in FR(B)) = 0$

CONVERGENZA DI V.A.

$X_1 — X_n$ —— IID

$X_i \sim U(0,1)$

$M_n = MAX\{X_1 — X_n\}$

$M_n \xrightarrow{d} M_\infty \qquad M_\infty = 1$ Q.C.

QUINDI ANCHE

$M_n \xrightarrow{P} M_\infty$

$$F_{M_n}(x) = P(MAX\{X_1 — X_n\} \leq x)$$
$$= P(X_1 \leq x, —, X_n \leq x)$$
$$= \begin{cases} x^n & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} = F_{M_\infty}(x)$$

$$P(|M_n - M_\infty| > \varepsilon) = P(|M_n - 1| > \varepsilon)$$
$$= P(M_n < 1 - \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \to 0 \qquad \varepsilon < 1$$

CONVERGENZA DI V.A.

$$M_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} M_\infty$$

$$E[|M_n - M_\infty|^2] =$$

$$= E[(M_n - 1)^2] =$$

$$= E[M_n^2 + 1 - 2M_n]$$

$$= 1 - 2E[M_n] + E[M_n^2]$$

$$E[M_n] = \int_0^1 x \cdot n x^{n-1} dx = \frac{n}{n+1} x^n \Big|_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

$$E[M_n^2] = \int_0^1 x^2 n x^{n-1} dx = \frac{n}{n+2} x^{n+2} \Big|_0^1 = \frac{n}{n+2}$$

$$= 1 - 2\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\downarrow \atop 1} + \underbrace{\frac{n}{n+2}}_{\downarrow \atop 1} \to 0$$

CONVERGENZA DI V.A.

LEGGE FORTE DEI GRANDI NUMERI

(X_n) IID (INDIPENDENTI ED IDENTICAMENTE DISTRIBUITI)

$X_n \in \mathcal{L}^1 \quad \forall n$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ SOMMA PARZIALE

ALLORA

$$\underbrace{\frac{S_n}{n}}_{\text{MEDIA EMPIRICA}} \longrightarrow E[X_1] \quad \text{Q.C. E IN } \mathcal{L}^1$$

* SE $X_n \in \mathcal{L}^2 \ \forall n$ ALLORA LA CONVERGENZA È ANCHE IN $\mathcal{L}^2$

IN QUESTO CASO, LA CONVERGENZA

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} E[X_1]$$

SEGUE DALLA DISUGUAGLIANZA DI BIENAYMÉ-CEBICEV

CONVERGENZA DI VA.

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

IDEA: LA SOMMA DI TERMINI CASUALI "PICCOLI" È ASINTOTICAMENTE NORMALE

VERSIONE CLASSICA

(X_n) IID, $X_n \in \mathcal{L}^2$

$E[X_n] = \mu$, $VAR[X_n] = \sigma^2$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

CONVERGENZA DI V.A.

(X_n) INDIPENDENTI

$E[X_n] = 0$ (NON RESTRITTIVO)

$VAR(X_n) = \sigma_n^2$

$s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$

CONDIZIONE DI LINDEBERG

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s_n^2} E\left[X_k^2 \, ; \, |X_k| \geq \varepsilon \cdot s_n\right] = 0$$

PER OGNI $\varepsilon > 0$.

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

ALLORA

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

* L'IPOTESI DI INDIPENDENZA PUÒ ESSERE RILASSATA (INDIPENDENZA ASINTOTICA)