

CONVERGENZA DI V.A.

(Ω, \mathcal{F}, P) (X_n) SUCCESSIONE DI V.A.

X V.A.

$X_n \rightarrow X$ Q.C. SE $P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X\right) = 1$

CONVERGENZA QUASI CERTA

ALTRI CRITERI DI CONVERGENZA

CONVERGENZA IN PROBABILITÀ:
 $X_n \xrightarrow{P} X$ SE
PER OGNI $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

CONVERGENZA IN DISTRIBUZIONE
(O IN LEGGE)
 $X_n \xrightarrow{d} X$ SE

$F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$:
 F_X È CONTINUA
IN x

CONVERGENZA DI V.A.

$$(X_n) \quad X \in \mathcal{L}^p \quad p \geq 1$$

CONVERGENZA IN \mathcal{L}^p

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \quad \text{S.E.}$$

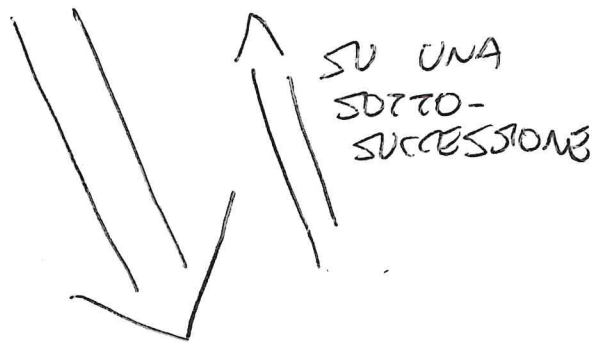
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[|X_n - X|^p] = 0$$

$$d_{\mathcal{L}^p}(X, Y) = E[|X - Y|^p]^{1/p}$$

CONVERGENZA DI V.A.

RELAZIONE TRA I DIVERSI TIPI DI CONVERGENZA

$$X_n \rightarrow X \text{ a.c.}$$

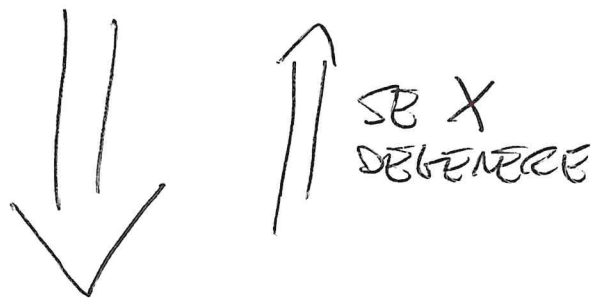


$$X_n \xrightarrow{p} X$$

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^s} X$$



$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$$



$$X_n \xrightarrow{d} X$$

CONVERGENZA DI V.A.

* CONVERGENZA IN DISTRIBUZIONE

È UNA PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI DI RIPARTIZIONE, O MEGLIO

DELLE MISURE IMMAGINE.

SI PUÒ SCRIVERE $F_n \xrightarrow{d} F$

* LE V.A. X_n (NELLA DEFINIZIONE DI CONVERGENZA IN DISTRIBUZIONE)

POSSONO ESSERE DEFINITE SU

SPAZI DI PROB. DIVERSI

TEOREMA SONO EQUIVALENTI

$$1) F_n \xrightarrow{d} F$$

$$2) \int g(x) dF_n(x) \rightarrow \int g(x) dF(x) \quad n \rightarrow +\infty$$

PER OGNI g CONTINUA, LIMITATA

$$(E[g(X_n)] \rightarrow E[g(X)])$$

$$3) P(X_n \in B) \rightarrow P(X \in B) \quad n \rightarrow +\infty$$

PER OGNI $B \in \mathcal{B} : P(X \in \text{PR}(B)) = 0$

CONVERGENZA DI V.A.

$$X_1 \sim X_n \sim \text{i.i.d.}$$

$$X_i \sim U(0,1)$$

$$M_n = \text{MAX} \{X_1, \dots, X_n\}$$

$$M_n \xrightarrow{d} M_\infty \quad M_\infty = 1 \text{ q.c.}$$

QUINDI ANCHE

$$M_n \xrightarrow{P} M_\infty$$

$$F_{M_n}(x) = P(\text{MAX} \{X_1, \dots, X_n\} \leq x)$$

$$= P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x)$$

$$= \begin{cases} x^n & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} = F_{M_\infty}(x)$$

$$P(|M_n - M_\infty| > \varepsilon) = P(|M_n - 1| > \varepsilon)$$

$$= P(M_n < 1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n \rightarrow 0$$

$$\varepsilon < 1$$

CONVERGENZA DI V.A.

$$M_n \xrightarrow{q^2} M_\infty$$

$$E[|M_n - M_\infty|^2] =$$

$$= E[(M_n - 1)^2] =$$

$$= E[M_n^2 + 1 - 2M_n]$$

$$= 1 - 2E[M_n] + E[M_n^2]$$

$$E[M_n] = \int_0^1 x \cdot n x^{n-1} dx = \frac{n}{n+1} x^n \Big|_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

$$E[M_n^2] = \int_0^1 x^2 \cdot n x^{n-1} dx = \frac{n}{n+2} x^{n+2} \Big|_0^1 = \frac{n}{n+2}$$

$$= 1 - 2 \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\downarrow 1} + \underbrace{\frac{n}{n+2}}_{\downarrow 1} \rightarrow 0$$

CONVERGENZA DI V.A.

LEGGE FORTE DEI GRANDI NUMERI

(X_n) IID (INDIPENDENTI ED IDENTICAMENTE DISTRIBUITI)

$$X_n \in \mathcal{L}^1 \quad \forall n$$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{SOMMA PARZIALE}$$

ALLORA

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow E[X_1] \quad \text{Q.C. } \in \mathcal{L}^1$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}$
MEDIA
EMPIRICA

* SE $X_n \in \mathcal{L}^2 \quad \forall n$ ALLORA
LA CONVERGENZA È ANCHE
IN \mathcal{L}^2

IN QUESTO CASO, LA CONVERGENZA

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} E[X_1]$$

SEGUE DALLA DISUGUAGLIANZA DI
BIENAYME - CHEBICHEV

CONVERGENZA DI VA.

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

IDEA: LA SOMMA DI TERMINI CASUALI "PICCOLI" È ASINTOTICAMENTE NORMALE

VERSIONE CLASSICA

(X_n) IID, $X_n \in \mathcal{L}^2$

$E[X_n] = \mu$, $\text{VAR}[X_n] = \sigma^2$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

CONVERGENZA DI V.A.

(X_n) INDIPENDENTI

$$E[X_n] = 0 \quad (\text{NON RESTRITTO})$$

$$\text{VAR}(X_n) = \sigma_n^2$$

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$$

CONDIZIONE DI LYNBERG

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_n^2} E[X_k^2 ; |X_k| \geq \varepsilon \cdot S_n] = 0$$

PER OGNI $\varepsilon > 0$.

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

ALLORA

$$\frac{S_n}{S_n} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

* L'IPOTESI DI INDIPENDENZA
PUÒ ESSERE RILASATA
(INDIPENDENZA ASINTOTICA)