CONDIZIONAMENTO

IDEA: GENERALIZZARE IL CONCETTO DI PROB. CONDIZIONATA

$P(A|B)$ PROB DI A SE SI VERIFICA B

$E[X|B]$ SPERANZA DI X SE SI VERIFICA B

PIÙ IN GENERALE ($\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$)

$P(A|\mathcal{G})$ PROB DI A CONDIZIONATA ALL' INFORMAZIONE IN $\mathcal{G}$

$E[X|\mathcal{G}]$ SPERANZA DI X " " " " $\mathcal{G}$

IL RISULTATO È UNA QUANTITÀ "DIPENDENTE" DA $\mathcal{G}$ CIOÈ UNA V.A. $\mathcal{G}$- MISURABILE

CONDIZIONAMENTO

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$X \in \mathcal{L}^1, \quad B \in \mathcal{F}, \quad P(B) > 0$

$$E[X|B] = \frac{1}{P(B)} E[X \cdot 1_B]$$

$$= \int_\Omega X \, dP_B = E^{P^B}[X]$$

HA TUTTE LE PROPRIETÀ DI UNA SPERANZA MATEMATICA

(RISPETTO $P^B(\cdot) = P(\cdot|B) = \dfrac{P(\cdot \cap B)}{P(B)}$)

$$E[X \cdot 1_B] \overset{\text{NOTAZIONE}}{=} E[X; B] = \int_B X \, dP$$

$$= E[X|B] \cdot P(B)$$

CONDIZIONAMENTO

LEMMA $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

A **ATOMO** DI $\mathcal{G}$:

* $A \in \mathcal{G}$, $A \neq \emptyset$
* SE $B \in \mathcal{G}$, $B \subset A$ ALLORA
  $B = \emptyset$ OPPURE $B = A$

SE $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ È $\mathcal{G}$-MISURABILE

ALLORA È **COSTANTE SU A**

PROVA SIA $\bar{\omega} \in A$, $X(\bar{\omega}) = \bar{x}$

$$A = (\underbrace{A \cap \{X = \bar{x}\}}_{A_1}) \cup (A \cap \{X \neq \bar{x}\})$$

$$A_1 \subset A \Rightarrow \underbrace{A_1 = \emptyset}_{\text{NO, } \bar{\omega} \in A_1} \vee A_1 = A$$

$$A_1 = A \Leftrightarrow A \subset \{X = \bar{x}\}$$

CONDIZIONAMENTO

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\mathbb{P} = \underbrace{\{A_1, A_2, \dots, A_n \dots\}}_{\text{FINITA O NUMERABILE}} \subset \mathcal{F}$$

$$\mathcal{G} = \sigma(\mathbb{P}) = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \ , \ I \subset \{1, 2, \dots\} \right\}$$

QUINDI OGNI $\underset{\overset{\uparrow}{\mathbb{P}}}{A_i}$ È UN ATOMO DI $\mathcal{G}$

~~SE~~ X È $\mathcal{G}$-MISURABILE SE E SOLO SE ~~ALLORA~~ X È COSTANTE SU OGNI $A_i \in \mathbb{P}$

(QUINDI $X = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot 1_{A_i}$
CON $c_i \in \mathbb{R}$)

CONDIZIONAMENTO

SIA COME PRIMA $\mathbb{P} = \{A_1, \dots, A_n, \dots\}$
CON $P(A_i) > 0$ PER OGNI i

DEFINIAMO PER $X \in \mathcal{L}^1$

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|A_i] \mathbb{1}_{A_i}$$

Z HA 3 PROPRIETÀ:

1) Z è $\mathcal{G} = \sigma(\mathbb{P})$ - MISURABILE

$$Z = \begin{cases} E[X|A_1] & \omega \in A_1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

2) $Z \in \mathcal{L}^1$ $\quad |Z| = \sum_{i=1}^{\infty} |E[X|A_i]| \cdot \mathbb{1}_{A_i}$

$$E[|Z|] = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{|E[X|A_i]|}_{\leq E[|X| \, |A_i]} \cdot P(A_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} E[|X| \, |A_i] P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} E[|X| \cdot \mathbb{1}_{A_i}] = E[|X|]$$

CONVERGENZA MONOTONA

3) PER OGNI $A \in \mathcal{G}$,

$$E[Z\,;A] = E[X\,;A]$$

$$A = \bigcup_{j \in I} A_j \qquad I \subset \{1,2,3,\dots\}$$

$$E[Z\,;A] = E\Big[\sum_{i=1}^{\infty} E[X|A_i]\,1_{A_i}\,;A\Big]$$

$$= E\Big[\sum_{j \in I} E[X|A_j]\,1_{A_j}\Big]$$

$$= \sum_{j \in I} E\big[E[X|A_j]\,1_{A_j}\big]$$

$$= \sum_{j \in I} \underbrace{E[X|A_j]\,P(A_j)}_{E[X 1_{A_j}]}$$

$$= E[X 1_A]$$

Z PRENDE IL NOME DI SPERANZA CONDIZIONATA DI X A $\mathcal{G}$, $Z = E[X|\mathcal{G}]$

CONDIZIONAMENTO

TEOREMA (KOLMOGOROV)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X \in \mathcal{L}^1$, $\underbrace{\mathcal{G}}_{\sigma\text{-ALGEBRA}} \subset \mathcal{F}$

ESISTE UNA V.A. Z SU $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ TALE CHE

1) Z È $\mathcal{G}$-MISURABILE

2) $Z \in \mathcal{L}^1$

3) PER OGNI $A \in \mathcal{G}$,

$$E[Z ; A] = E[X ; A]$$

SE Z' È UNA V.A. CHE SODDISFA 1), 2), 3), ALLORA $Z' = Z$ Q.C.

$Z = E[X \mid \mathcal{G}]$ <u>SPERANZA DI X CONDIZIONATA ALL'INFORMAZIONE IN $\mathcal{G}$</u> (<u>V.A.!</u>)

$$\omega \longrightarrow E[X \mid \mathcal{G}](\omega)$$

CONDIZIONAMENTO

QUINDI

1) $E[X|\mathcal{G}]$ È $\mathcal{G}$ MISURABILE

2) $E[X|\mathcal{G}] \in \mathcal{L}^1$

3) PER OGNI $A \in \mathcal{G}$,

$$E[E[X|\mathcal{G}]; A] = E[X; A]$$

PROPRIETÀ DELLE "MEDIE PARZIALI"

INOLTRE $E[X|\mathcal{G}]$ È UNICA Q.C.

OSSERVAZIONI

* IL TEOREMA VALE PER $X \geq 0$ Q.C.
  CON 2) SOSTITUITA DA
  2') $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$ Q.C.

* $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$
  $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ Q.C.

CONDIZIONAMENTO

* LA PROPRIETÀ 3) PUÒ ESSERE SOSTITUITA DALLA PIÙ GENERALE

$$E\left[E[X|\mathcal{G}] \cdot Y\right] = E[X \cdot Y]$$

PER OGNI V.A. Y - $\mathcal{G}$ MISURABILE TALE CHE LE SPERANZE ESISTONO

* SE $\mathcal{G} = \sigma(Y_1 \ldots Y_n)$

ALLORA

NOTAZIONE

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X|Y_1 \ldots Y_n]$$

$$= h(Y_1 \ldots, Y_n)$$

CURVA DI REGRESSIONE

PER UNA FUNZIONE $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ MISURABILE

NOTAZIONE

$$E[X \mid Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n] = h(y_1 \ldots, y_n)$$

CONDIZIONAMENTO

* PROBABILITÀ CONDIZIONATA A UNA σ-ALGEBRA : $B \in \mathcal{F}$

$$P(B|\mathcal{G}) = E[1_B|\mathcal{G}]$$

OSS: $P(\emptyset|\mathcal{G}) = 0$
$P(\Omega|\mathcal{G}) = 1$ a.c.

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|\mathcal{G}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathcal{G}) \quad \text{a.c.}$$

SE (A_n) A DUE A DUE DISTINTI

CONDIZIONAMENTO

PROPRIETÀ DELLA SPERANZA CONDIZIONATA

1) LINEARITÀ $X, Y \in \mathcal{L}^1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$E[\alpha X + \beta Y | \mathcal{G}] = \alpha E[X|\mathcal{G}] + \beta E[Y|\mathcal{G}]$$

Q.C.

2) MONOTONIA $X, Y \in \mathcal{L}^1$

$$X \leq Y \text{ Q.C.} \Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$$

Q.C.

3) SE X, Y TALI CHE

$X \cdot Y \in \mathcal{L}^1$, Y-$\mathcal{G}$-MISURABILE

$$E[XY|\mathcal{G}] = Y E[X|\mathcal{G}] \quad \text{Q.C.}$$

IN PARTICOLARE

$$E[Y|\mathcal{G}] = Y$$

~~VARIABILE~~

MISURABILITÀ $\Rightarrow$ "COSTANZA"

CONDIZIONAMENTO

4) PROPRIETÀ ITERATIVA

SE $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ σ-ALGEBRE

$$E\left[E\left[X \mid \mathcal{G}_2\right] \mid \mathcal{G}_1\right] = E\left[X \mid \mathcal{G}_1\right]$$

Q.C.

IN PARTICOLARE,

$$E\left[E\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right] = E\left[X\right]$$

5) $X \in I$ Q.C. I INTERVALLO APERTO

$f: I \to \mathbb{R}$ CONVESSA

$f(X) \in \mathcal{L}^1$

ALLORA $X \in \mathcal{L}^1$ E

$$f\left(E\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right) \leq E\left[f(X) \mid \mathcal{G}\right] \quad \text{Q.C.}$$

DIS. DI JENSEN

CONDIZIONAMENTO

ESEMPI (DIS. JENSEN)

$$|E(X|\mathcal{G})| \leq E[|X| \,|\, \mathcal{G}]$$

$$E(X|\mathcal{G})^2 \leq E(X^2|\mathcal{G})$$

$$E(X|\mathcal{G}) \leq \log E[e^X|\mathcal{G}]$$

$$E(X|\mathcal{G}) \geq e^{E[\log X|\mathcal{G}]}$$

CON $f(x) = |x|^p$ CONVESSA SE $p \geq 1$

$$|E(X|\mathcal{G})|^p \leq E[|X|^p|\mathcal{G}]$$

PRENDENDO LA SPERANZA

$$E\left[|E(X|\mathcal{G})|^p\right] \leq E[|X|^p]$$

QUINDI SE $X \in \mathcal{L}^p$ ALLORA

$E[X|\mathcal{G}] \in \mathcal{L}^p$

CONDIZIONAMENTO

6) SE X INDIP. DA $\mathcal{G}$ ($\sigma(X)$ INDIP. DA $\mathcal{G}$) ALLORA

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X] \quad \text{Q.C.}$$

7) X, Y V.A. TALI CHE

* X INDIP. DA $\mathcal{G}$
* Y $\mathcal{G}$-MISURABILE (QUINDI $\sigma(X)$ E $\sigma(Y)$ INDIP.)

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ MISURABILE TALE CHE

$g(X,Y) \in \mathcal{L}^1$ O $g \geq 0$

$$E[g(X,Y)|\mathcal{G}] = E[g(X,y)|\mathcal{G}]\big|_{y=Y}$$

$$= E[g(X,y)]\big|_{y=Y}$$

CONDIZIONAMENTO

8) SE A È UN ATOMO DI $\mathcal{G}$, $P(A) > 0$

$$E[X|\mathcal{G}](\omega) = E[X|A] \quad \omega \in A \text{ Q.C.}$$

IN PARTICOLARE, SE $Y_1 \dots Y_n$ SONO TALI CHE PER $y_1 \dots y_n \in \mathbb{R}$

$$P(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n) > 0$$

QUINDI

$$E[X | Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n] =$$

$$= \frac{1}{P(Y_1 = y_1 \dots Y_n = y_n)} E[X ; Y_1 = y_1 \dots Y_n = y_n]$$

CONDIZIONAMENTO

PROPRIETÀ DI MINIMA DISTANZA DELLA SPERANZA CONDIZIONATA

IL PROBLEMA

$$\min_{\substack{Z\ \mathcal{G}\text{-MISURABILE} \\ Z \in \mathcal{L}^2}} d(X,Z)$$

È RISOLTO DA $Z = E(X|\mathcal{G})$

LA DISTANZA È DEFINITA DA $(X, Z \in \mathcal{L}^2)$

$$d(X,Z) = \sqrt{E\left[(X-Z)^2\right]}$$

INFATTI, $Z \in \mathcal{L}^2$, $\mathcal{G}$-MISURABILE

$$d(X,Z)^2 = E\left[(X-Z)^2\right] =$$

$$= \underbrace{E\left[(X - E(X|\mathcal{G}))^2\right]}_{d(X,E(X|\mathcal{G}))^2} + \underbrace{E\left[(E(X|\mathcal{G})-Z)^2\right]}_{d(E(X|\mathcal{G}),Z)^2}$$

$$+ \underbrace{2E\left[(X-E(X|\mathcal{G}))\cdot(E(X|\mathcal{G})-Z)\right]}_{=0}$$

$$\geq d(X, E(X|\mathcal{G}))^2$$

CONDIZIONAMENTO

ORTOGONALITÀ IN $\mathcal{L}^2$ DI $E(X|\mathcal{G})$

$E(X|\mathcal{G})$ È CARATTERIZZATA COME L'UNICO $Z \in \mathcal{L}^2$ TALE CHE

* Z È $\mathcal{G}$-MISURABILE
* $X - Z \perp Y$ PER OGNI Y $\mathcal{G}$-MIS.

$X \perp Y \iff (X|Y) = 0$ $\qquad X, Y \in \mathcal{L}^2$

IL PRODOTTO INTERNO $(X|Y)$ È DEFINITO DA $(X|Y) = E(X \cdot Y)$

QUINDI $X \perp Y \iff E(XY) = 0$

(PER V.A. CENTRATE ≡ MEDIA ZERO, ORTOGONALITÀ ≡ NON CORRELAZIONE)

$$X - Z \perp Y \iff E((X-Z)Y) = 0$$
$$\iff E(XY) = E(ZY)$$

PROPRIETÀ DELLA MEDIA PARZIALE

CONDIZIONAMENTO

DENSITÀ CONDIZIONATA

$$X = [\underbrace{X_1 \ldots X_n}_{n}, \underbrace{X_{n+1} \ldots X_m}_{m-n}]$$

$$X' \qquad X''$$

CON DENSITÀ CONGIUNTA

$$f_X(x_1 \ldots x_n, x_{n+1} \ldots x_m)$$

LA DENSITÀ CONDIZIONATA DI X' A $X'' = x''$ $(X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, X_m = x_m)$

È

$$f_{X'|X''}(x_1 \ldots x_n | x_{n+1} \ldots x_m) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x_1 \ldots x_n\, x_{n+1} \ldots x_m)}{f_{X''}(x_{n+1} \ldots x_m)} & \text{SE } f_{X''}(x_{n+1} \ldots x_m) > 0 \\ 0 & \text{SE } f_{X''}(x_{n+1} \ldots) = 0 \end{cases}$$

FISSATO $x_{n+1}, \ldots, x_m$: $f_{X''}(x_{n+1} \ldots x_m) > 0$

$f_{X'|X''}$ È UNA DENSITÀ SU $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{X'|X''}(x_1 \ldots x_n | x_{n+1} \ldots x_m)\, dx_1 \ldots dx_n = 1$$

CONDIZIONAMENTO

DENSITÀ E SPERANZA CONDIZIONATA

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ MISURABILE

$g(X') \in \mathcal{L}^1$ o $g \geq 0$

$$E[g(X') \mid X'' = x''] =$$

$$= E[g(X_1 \ldots X_n) \mid X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, X_m = x_m]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1 \ldots x_n) f_{X' \mid X''}(x_1 \ldots x_n \mid x_{n+1} \ldots x_m) \cdot dx_1 \ldots dx_n$$

CONDIZIONAMENTO

VARIANZA E COVARIANZA CONDIZIONATA

$$\mathrm{VAR}[X|\mathcal{G}] = E\left[(X - E(X|\mathcal{G}))^2 | \mathcal{G}\right]$$

$$= E[X^2|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}]^2$$

$$\mathrm{COV}(X,Y|\mathcal{G}) = E\left[(X - E(X|\mathcal{G})) \cdot (Y - E(Y|\mathcal{G})) | \mathcal{G}\right]$$

$$= E[XY|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}]E[Y|\mathcal{G}]$$