Esercizio 1. *Calcolare il volume del seguente sottinsieme di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - y^2\right\}$$

Soluzione. Osserviamo che le prime tre disuguaglianze definiscono un triangolo T di vertici $(-1, -1), (2, -1), (-1, 2)$. Possiamo allora riscrivere l'insieme E come segue:

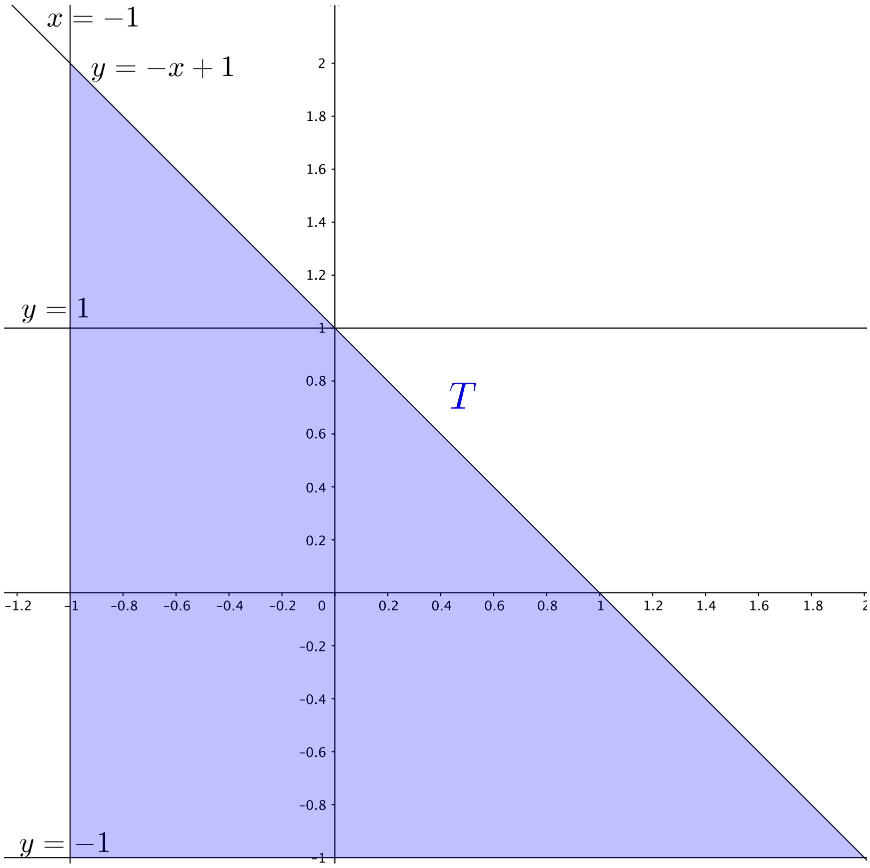

Figura 1: L'insieme T.

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in T, 0 \leq z \leq 1 - y^2\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - y^2\right\} \end{aligned}$$

Osserviamo tuttavia che la terza disequazione implicitamente impone che sia $1 - y^2 \geq 0$ cioè $-1 \leq y \leq 1$. Possiamo riscrivere E come segue:

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in T_1, 0 \leq z \leq 1 - y^2\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1 - x, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - y^2\right\} \end{aligned}$$

con T_1 trapezio di vertici $(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (-1, 1)$.

Definiamo poi $T_2 = T \setminus T_1$ ottenendo:

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in T_1, 0 \leq z \leq 1 - y^2\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in T \setminus T_2, 0 \leq z \leq 1 - y^2\right\} \end{aligned}$$

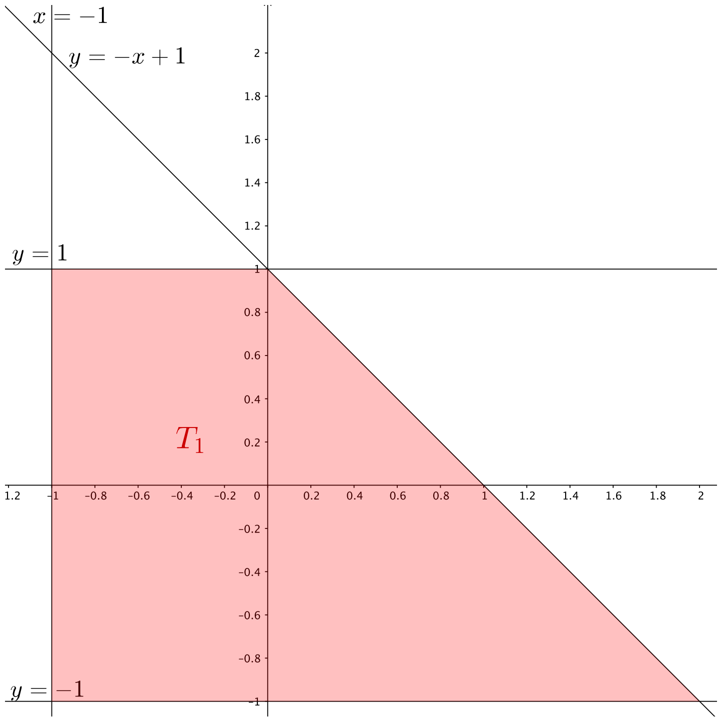

Figura 2: L'insieme T_1.

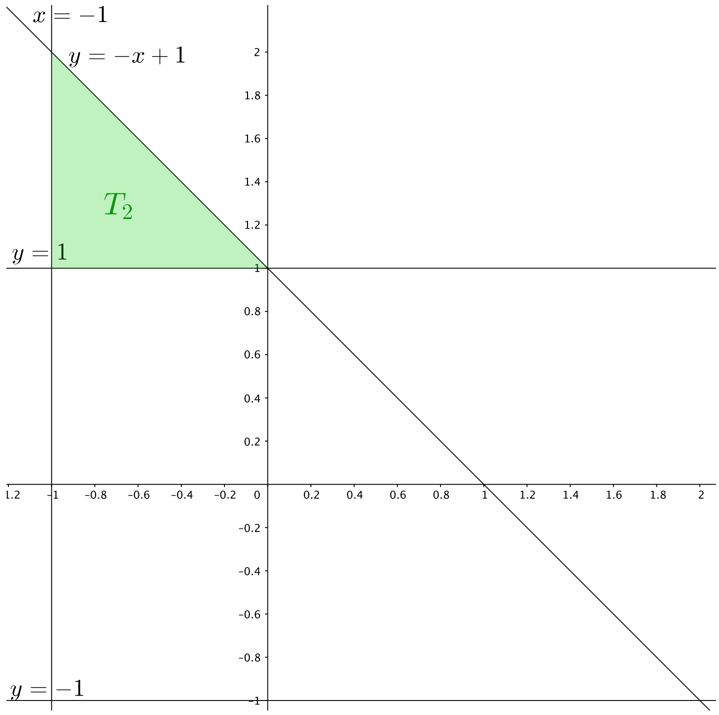

Figura 3: L'insieme T_2.

ove:

$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0, 1 \le y \le 1-x\}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
Vol(E) &= \iiint_E 1\,dx\,dy\,dz = \iint_{T_1} \left(\int_0^{1-y^2} 1\,dz \right) dx\,dy = \iint_{T_1} 1-y^2\,dx\,dy \\
&= \iint_T 1-y^2\,dx\,dy - \iint_{T_2} 1-y^2\,dx\,dy \\
&= \int_{-1}^{2} \int_{-1}^{-x+1} 1-y^2\,dy\,dx - \int_{-1}^{0} \int_{1}^{-x+1} 1-y^2\,dy\,dx = \\
&= \int_{-1}^{2} \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{-x+1} dx - \int_{-1}^{0} \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{1}^{-x+1} dx = \\
&= \int_{-1}^{2} \left[-x+1 - \frac{(-x+1)^3}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] dx \\
&- \int_{-1}^{0} \left[-x+1 - \frac{(-x+1)^3}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right] dx \\
&= \int_{-1}^{2} \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{4}{3}\,dx - \int_{-1}^{0} \frac{x^3}{3} - x^2\,dx = \\
&= \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}x \right]_{-1}^{2} - \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{16}{12} - \frac{8}{3} + \frac{8}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2. *Determinare se la seguente serie è convergente:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\left[2n+3+(-1)^n\right] + (-1)^{n+1}}}$$

Soluzione. Osservo che la serie in esame si può scrivere nella forma:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1}$$

e che:

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{2}{n-1}$$

e quindi:

$$S_{2k} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{2}{n} \to +\infty \qquad \text{se } k \to +\infty.$$

La serie in esame è pertanto divergente. L'esempio dimostra che l'ipotesi di monotonicità nel criterio di Leibniz è necessaria.

Esercizio 3. *Determinare il volume della regione di $\mathbb{R}^3$ così definita:*

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 16, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, y \le x\}$$

Soluzione. Ricordiamo la formula per il cambio di coordinate da cartesiane a sferiche.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \qquad\qquad \rho \in [0, +\infty], \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi] \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

la cui Jacobiana associata è data da:

$$J(\rho,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & -\rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{pmatrix}$$

e il cui determinante è

$$\begin{aligned} |\det[J(\rho,\theta,\phi)]| =& |-\rho^2\cos\phi(\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi + \cos^2\theta\sin\phi\cos\phi) - \rho^2\sin^3\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta)| \\ =& |-\rho^2\sin\phi\cos^2\phi(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - \rho^2\sin^3\phi(\cos^2\theta + \sin^2\theta)| \\ =& |-\rho^2\sin\phi\cos^2\phi - \rho^2\sin^3\phi| \\ =& \rho^2|\sin\phi| = \rho^2\sin\phi \end{aligned}$$

In coordinate sferiche l'insieme A diventa:

$$S = \left\{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \times [0,\pi] : 2 \leq \rho \leq 4, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

e pertanto

$$\begin{aligned} Vol(A) =& \iiint_A 1dx\,dy\,dz = \iiint_S \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi = \int_2^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta\,d\rho \\ =& \frac{\pi}{4}\cdot[-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_2^4 = \frac{\pi}{4}\cdot\left[\frac{64-8}{3}\right] = \frac{14}{3}\pi \end{aligned}$$

Esercizio 4. *Determinare il volume della regione di $\mathbb{R}^3$ così definita:*

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\}$$

con $r < R$.

Soluzione. Ricordiamo la formula per il cambio di coordinate da cartesiane a cilindriche.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \qquad\qquad \rho \in [0, +\infty], \theta \in [0, 2\pi], h \in \mathbb{R} \\ z = h \end{cases}$$

la cui Jacobiana associata è data da:

$$J(\rho,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e il cui determinante è ρ. In coordinate cilindriche l'insieme A diventa:

$$C = \left\{(\rho,\theta,h) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} : 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{R^2 - r^2} \leq h \leq \sqrt{R^2 - r^2}\right\}$$

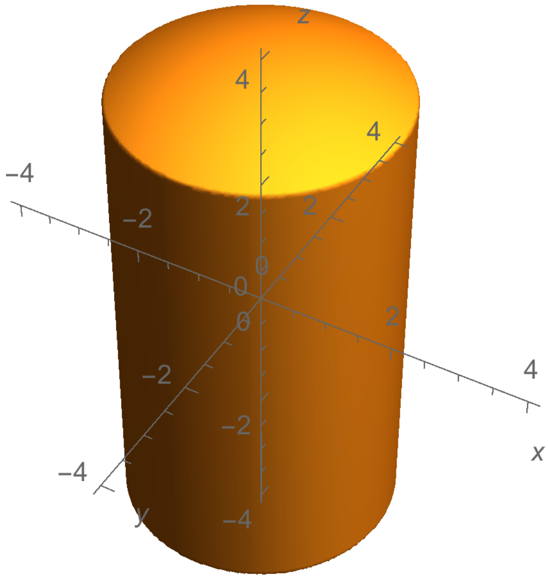

Figura 4: L'insieme A.

e pertanto

$$Vol(A) = \iiint_A 1 dx\, dy\, dz = \iiint_C \rho\, d\rho\, d\theta\, dh = \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} \rho\, dh\, d\rho\, d\theta$$

$$= 4\pi \int_0^r \rho \int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} 1\, dh\, d\rho = 4\pi \int_0^r \rho\sqrt{R^2-\rho^2} d\rho = -2\frac{2}{3}\pi \int_0^r \frac{3}{2}\sqrt{R^2-\rho^2}(-2\rho)d\rho =$$

$$-\frac{4}{3}\pi \left[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^r = \frac{4}{3}\pi[R^3 - (R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}]$$

Esercizio 5. *Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da:*

$$\omega(x, y, z) = 3x^2y\, dx - 6xy^2\, dy + 6xyz\, dz$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva data da:

$$\gamma(t) = (t, -t^2, 2t^2).$$

Soluzione. L'integrale di linea del campo di vettori $F(x, y, z) = (3x^2y, -6xy^2, 6xyz)$ è dato da:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Pertanto:

$$\int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 (-3t^4, -6t^5, -12t^5) \cdot (1, -2t, 4t)\, dt$$

$$= \int_0^1 (-3t^4 + 12t^6, -48t^6) = -\frac{3}{5} - \frac{36}{7} = -\frac{201}{35}$$

Esercizio 6. *Sia ω la 2-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da:*

$$\omega(x, y, z) = x\,dy \wedge dz - 2y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$$

Calcolare $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ è la superficie data da:

$$\sigma(u, v) = (u, u + v, v).$$

Soluzione. L'integrale di superficie o flusso del campo di vettori $F(x, y, z) = (x, -2y, z)$ è dato da:

$$\int_\sigma \omega = \iint_{[0,1]\times[0,1]} F(\sigma(u, v)) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v)\,du\,dv$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (u, -2u - 2v, v) \cdot [(1, 1, 0) \times (0, 1, 1)]\,du\,dv$$

Essendo

$$(u, -2u - 2v, v) \cdot [(1, 1, 0) \times (0, 1, 1)] = \det \begin{pmatrix} u & -2u - 2v & v \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = u + 2u + 2v + v = 3(u + v)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (u, -2u - 2v, v) \cdot [(1, 1, 0) \times (0, 1, 1)]\,du\,dv = \int_0^1 \int_0^1 3(u + v)\,du\,dv$$

$$= 3 \int_0^1 \int_0^1 u + v\,du\,dv = 3 \int_0^1 v + \frac{1}{2}\,dv = 3$$