

Geometria 1

Simulazione d'esame

Anno accademico 2021-2022

24/12/2021

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1) Considerare il seguente sistema lineare reale:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = a \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = b \\ 3x_1 - x_2 - 3x_4 = c \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = d \end{cases}$$

Applicare l'algoritmo di Gauss alla matrice completa del sistema indicando a ogni passo gli elementi pivot. Determinare la condizione che devono soddisfare i parametri a , b , c e d affinché il sistema sia compatibile. Trovare una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

2) Si consideri la seguente matrice di $M_3(\mathbb{C})$:

$$A_c = \begin{pmatrix} c & 1 & 2 \\ 1 & c & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $c \in \mathbb{C}$ è un parametro.

Verificare che A_c è diagonalizzabile per ogni c diverso da 0. Per tali c scrivere una matrice diagonale simile ad A_c e una base di \mathbb{C}^3 di autovettori di A_c .

3) In ciascuno dei tre casi seguenti dire se esistono applicazioni lineari che soddisfano le condizioni indicate; nel caso in cui la risposta è positiva, dire se ne esiste una sola o più d'una.

- $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suriettiva e tale che $\ker f = \langle (1, 1, 0, 2) \rangle$;
- $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\text{im}(g) = \langle (2, 5) \rangle$;
- $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ iniettiva e tale che $\text{im}(h)$ sia generata da $v_1 = (3, 1, 1)$ e $v_2 = (-1, 2, 0)$.

4) Considerare il prodotto scalare su \mathbb{R}^3 definito da

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 3x_3y_3.$$

Denotiamo con e_1, e_2, e_3 la base canonica di \mathbb{R}^3 .

- (a) Dati i vettori $v = (1 + \sqrt{2})e_1 + e_3$, $w = -e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^3$, calcolare le loro norme e l'angolo convesso fra v e w rispetto al prodotto scalare sopra definito.
- (b) Rispetto allo stesso prodotto scalare, trovare una base ortonormale del sottospazio W di \mathbb{R}^3 generato da v_1, v_2 dove $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (3, 1, 1)$, e completarla a una base \mathcal{B} ortonormale di \mathbb{R}^3 .
- (c) Giustificare l'affermazione che si tratta di un prodotto scalare.