CORSO DI GEOMETRIA
RANGO DI MATRICI
A.A. 2021/2022
PROF. VALENTINA BEORCHIA

Indice

1. Rango: definizione e prime proprietà

Definizione 1.1. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice di tipo $m \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$. Il **rango** di A è la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di A:

$$\mathrm{rg}(A) := \dim \mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}), \quad \mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq \mathbb{K}^m.$$

In diversi libri di testo, il rango definito qui sopra viene chiamato rango per colonne di A, mentre il rango per righe si definisce come la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ generato dalle righe di A, cioè

$$\dim \mathrm{Span}(A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(m)}), \quad \mathrm{Span}(A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(m)}) \subseteq \mathbb{K}^n.$$

Osserviamo che il rango per righe di A coincide con il rango della matrice trasposta di A.

Osservazione 1.2. *(1)* $\mathrm{rg}(A)$ *è uguale al massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A.*

(2) l' inclusione $\mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq \mathbb{K}^m$ *implica in particolare che*

$$\mathrm{rg}(A) \leq m.$$

Inoltre, siccome $\mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)})$ *è generato da* n *vettori, si ha anche*

$$\mathrm{rg}(A) \leq n.$$

Quindi

$$\mathrm{rg}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Esempi 1.3. (1) Se A è la matrice nulla: $A = 0$, allora $\mathrm{rg}(A) = 0$. Viceversa, se $\mathrm{rg}(A) = 0$, allora $A = 0$.

(2) $\mathrm{rg}(\mathbb{I}_n) = n$. Infatti le colonne della matrice unità sono i vettori della base canonica di $\mathbb{K}^n$:

$$(\mathbb{I}_n)^{(1)} = e_1, \dots, (\mathbb{I}_n)^{(n)} = e_n.$$

Proposizione 1.4. *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e sia $\widetilde{A}$ una matrice ottenuta da A tramite una sequenza di operazioni elementari. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

(1) $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\widetilde{A})$;

(2) se $\widetilde{A}$ è a scala, $\operatorname{rg}(\widetilde{A})$ è uguale al numero r delle righe non nulle di $\widetilde{A}$.
Inoltre $A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}$ sono linearmente indipendenti, dove $\widetilde{a}_{1,j_1}, \dots, \widetilde{a}_{r,j_r}$ sono i pivot di $\widetilde{A}$.

(3) $\operatorname{rg}({}^t A) = \operatorname{rg}({}^t \widetilde{A})$.

(4) $\operatorname{rg}({}^t \widetilde{A}) = \operatorname{rg}(\widetilde{A})$.

(5) $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^t A)$.

Dimostrazione. (1) Per dimostrare questa affermazione usiamo un risultato che vedremo più avanti, il Teorema di dimensione. Questo teorema afferma che

$$\operatorname{rg}(A) = n - \dim(W), \tag{1.1}$$

dove

$$W = \{s \in \mathbb{K}^n | A \cdot s = 0\}$$

è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ formato dalle soluzioni del sistema omogeneo di equazioni lineari

$$A \cdot X = 0.$$

Se $\widetilde{A}$ si ottiene da A per mezzo di operazioni elementari, allora il sistema di equazioni lineari

$$\widetilde{A} \cdot X = 0$$

è equivalente ad $A \cdot X = 0$, cioè $\widetilde{W} = W$, dove $\widetilde{W} = \{s \in \mathbb{K}^n | \widetilde{A} \cdot s = 0\}$ è il sottospazio di $\mathbb{K}^n$ delle soluzioni di $\widetilde{A} \cdot X = 0$. Usando la formula (1.1) abbiamo quindi:

$$\operatorname{rg}(A) = n - \dim(W) = n - \dim(\widetilde{W}) = \operatorname{rg}(\widetilde{A}).$$

(2) Supponiamo ora che $\widetilde{A}$ sia a scala, e sia r il numero delle righe non nulle di $\widetilde{A}$. Sia $\widetilde{a}_{ij}$ l' elemento di posto i, j di $\widetilde{A}$. Siccome $\widetilde{A}$ è a scala, si ha che $a_{ij} = 0$, se $i > r$, quindi $\widetilde{A}^{(j)} \in \operatorname{Span}(e_1, \dots, e_r)$ per ogni $j = 1, \dots, n$, dove $\widetilde{A}^{(j)}$ è la colonna j-esima di $\widetilde{A}$ ed $e_1, \dots, e_r$ sono i primi r vettori della base canonica di $\mathbb{K}^n$. Da questo segue che

$$\operatorname{Span}(\widetilde{A}^{(1)}, \dots, \widetilde{A}^{(n)}) \subseteq \operatorname{Span}(e_1, \dots, e_r),$$

quindi

$$\operatorname{rg}(\widetilde{A}) = \dim \operatorname{Span}(\widetilde{A}^{(1)}, \dots, \widetilde{A}^{(n)}) \leq \dim \operatorname{Span}(e_1, \dots, e_r) = r.$$

Per dimostrare che $\operatorname{rg}(\widetilde{A}) = r$, è sufficiente dimostrare che le colonne

$$\widetilde{A}^{(j_1)}, \dots, \widetilde{A}^{(j_r)}$$

sono linearmente indipendenti, dove $\widetilde{a}_{1j_1}, \widetilde{a}_{2j_2}, \dots, \widetilde{a}_{rj_r}$ sono i pivot di $\widetilde{A}$. A tale scopo, consideriamo una combinazione lineare

$$\lambda_1 \widetilde{A}^{(j_1)} + \cdots + \lambda_r \widetilde{A}^{(j_r)} = 0 \tag{1.2}$$

e supponiamo che essa dia il vettore nullo. Osserviamo che il membro sinistro della (1.2) è un vettore della forma seguente:

$$\left(\begin{array}{c} \lambda_1\widetilde{a}_{1j_1} + \lambda_2\widetilde{a}_{1j_2} + \dots + \lambda_r\widetilde{a}_{1j_r} \\ \lambda_2\widetilde{a}_{2j_2} + \dots \lambda_r\widetilde{a}_{2j_r} \\ \vdots \\ \lambda_r\widetilde{a}_{rj_r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right). \tag{1.3}$$

Siccome $\widetilde{a}_{1j_1} \neq 0, \widetilde{a}_{2j_2} \neq 0, \dots, \widetilde{a}_{rj_r} \neq 0$, il vettore (1.3) è nullo se e solo se $\lambda_r = \lambda_{r-1} = \dots = \lambda_1 = 0$. Concludiamo quindi che le colonne $\widetilde{A}^{(j_1)}, \dots, \widetilde{A}^{(j_r)}$ sono linearmente indipendenti e $\mathrm{rg}(\widetilde{A}) = r$.

Dimostriamo ora che le colonne $A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}$ di A, sono linearmente indipendenti, dove $j_1, j_2, \dots, j_r$ sono gli indici di colonna dei pivot $\widetilde{a}_{1j_1}, \widetilde{a}_{2j_2}, \dots, \widetilde{a}_{rj_r}$ di $\widetilde{A}$.

A tale scopo, consideriamo una combinazione lineare

$$\beta_1 A^{(j_1)} + \dots + \beta_r A^{(j_r)} = 0 \tag{1.4}$$

e supponiamo che essa dia il vettore nullo. Definiamo il vettore $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ come segue:

$$s_i := \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j_1, \dots j_r; \\ \beta_i, & \text{se } i = j_k,\ k = 1, \dots, r. \end{cases}$$

Con questa scelta abbiamo

$$A \cdot s = \beta_1 A^{(j_1)} + \dots + \beta_r A^{(j_r)},$$

quindi per la (1.4) si ha

$$A \cdot s = 0.$$

Siccome $\widetilde{A}$ è ottenuta da A per mezzo di operazioni elementari, abbiamo che vale anche

$$\widetilde{A} \cdot s = 0.$$

Osserviamo che

$$\widetilde{A} \cdot s = \beta_1 \widetilde{A}^{(j_1)} + \dots + \beta_r \widetilde{A}^{(j_r)},$$

e siccome $\widetilde{A}^{(j_1)}, \dots, \widetilde{A}^{(j_r)}$ sono linearmente indipendenti, concludiamo che $\beta_1 = \dots = \beta_r = 0$, quindi anche $A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}$ sono linearmente indipendenti.

(3) È sufficiente dimostrare l' enunciato nel caso in cui $\widetilde{A}$ si ottiene da A per mezzo di una operazione elementare di tipo 1, rispettivamente di tipo 2 o 3. Supponiamo dapprima che A sia ottenuta da A scambiando la riga i-esima con quella j-esima, per qualche

$i \neq j, i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Questo corrisponde allo scambio della colonna i-esima con la j-esima di ${}^tA$, quindi

$$({}^t\widetilde{A})^{(k)} = \begin{cases} ({}^tA)^{(k)}, & \text{se } k \neq i, j, \\ ({}^tA)^{(j)}, & \text{se } k = i, \\ ({}^tA)^{(i)}, & \text{se } k = j. \end{cases}$$

Da questo segue immediatamente che

$$\mathrm{Span}(({}^tA)^{(1)}, \ldots, ({}^tA)^{(m)}) = \mathrm{Span}(({}^t\widetilde{A})^{(1)}, \ldots, ({}^t\widetilde{A})^{(m)}),$$

perciò $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}({}^t\widetilde{A})$.

Supponiamo ora che $\widetilde{A}$ si ottenga da A per mezzo di una operazione elementare di tipo 3, precisamente sostituendo la riga j-esima con $A_{(j)} + cA_{(i)}$, per qualche $i \neq j, i, j \in \{1, \ldots, m\}$, e $c \in \mathbb{K}$. Allora

$$({}^t\widetilde{A})^{(k)} = \begin{cases} ({}^tA)^{(k)}, & \text{se } k \neq j, \\ ({}^tA)^{(j)} + c({}^tA)^{(i)}, & \text{se } k = j, \end{cases}$$

ed in questo caso abbiamo:

$$\mathrm{Span}(({}^tA)^{(1)}, \ldots, ({}^tA)^{(m)}) = \mathrm{Span}(({}^tA)^{(1)}, \ldots, ({}^tA)^{(j-1)}, ({}^tA)^{(j)} + c({}^tA)^{(i)}, \ldots, ({}^tA)^{(m)}) =$$

$$= \mathrm{Span}(({}^t\widetilde{A})^{(1)}, \ldots, ({}^t\widetilde{A})^{(m)}),$$

perciò $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}({}^t\widetilde{A})$.

Si verifica analogamente che se $\widetilde{A}$ si ottiene da A per mezzo di una operazione elementare di tipo 2, allora $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}({}^t\widetilde{A})$.

(4) Per i punti 1 e 3 appena dimostrati, è sufficiente dimostrare che

$$\mathrm{rg}(\widetilde{A}) = \mathrm{rg}({}^t\widetilde{A}),$$

dove $\widetilde{A}$ è una matrice a scala ottenuta da A per mezzo di operazioni elementari.

Per il punto 2 abbiamo che $\mathrm{rg}(\widetilde{A}) = r$, dove r è il numero delle righe non nulle di A. Dimostriamo quindi che $\mathrm{rg}({}^t\widetilde{A}) = r$.

A tale scopo, sia

$$c_1({}^t\widetilde{A})^{(1)} + \cdots + c_m({}^t\widetilde{A})^{(m)} \in \mathbb{K}^n \tag{1.5}$$

una combinazione lineare delle colonne di ${}^t\widetilde{A}$, e supponiamo che sia uguale al vettore nullo. Osserviamo che

$$({}^t\widetilde{A})^{(r+1)} = \cdots = ({}^t\widetilde{A})^{(m)} = 0,$$

quindi possiamo omettere queste colonne nella (1.5). Inoltre tale combinazione lineare ha la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1 \widetilde{a}_{1j_1} \\ \vdots \\ \lambda_1 \widetilde{a}_{1j_2} + \lambda_2 \widetilde{a}_{2j_2} \\ \vdots \\ \lambda_1 \widetilde{a}_{1j_r} + \dots \lambda_r \widetilde{a}_{rj_r} \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Siccome $\widetilde{a}_{1j_1} \neq 0, \widetilde{a}_{2j_2} \neq 0, \dots, \widetilde{a}_{rj_r} \neq 0$, il vettore (1.6) è nullo se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$. Concludiamo quindi che le colonne $({}^t\widetilde{A})^{(1)}, \dots, ({}^t\widetilde{A})^{(r)}$ sono linearmente indipendenti e $\mathrm{rg}({}^t\widetilde{A}) = r$.

□

Teorema 1.5. *(Rouché-Capelli). Un sistema lineare $A \cdot X = b$ di m equazioni lineari in n incognite è compatibile $\iff$*

$$\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A).$$

In tal caso la sua generica soluzione dipende da $n - r$ parametri, dove $r = \mathrm{rg}(A)$.

La dimostrazione del Teorema di Rouché-Capelli seguirà dal seguente risultato:

Lemma 1.6. *Un sistema lineare $A \cdot X = b$ di m equazioni lineari di ordine n è compatibile $\iff$*

$$b \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}). \tag{1.7}$$

Dimostrazione. Abbiamo che $A \cdot X = b$ è compatibile $\iff$ esiste $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ tale che $A \cdot s = b \iff$

$$A^{(1)} s_1 + A^{(2)} s_2 + \dots + A^{(n)} s_n = b \iff b \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}).$$

□

Dimostrazione. (Teorema di Rouché - Capelli) Per il Lemma 1.6 il sistema $A \cdot X = b$ è compatibile se e solo se $b \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)})$. Si può verificare facilmente che tale condizione è soddisfatta se e solo se

$$\mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) = \mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}, b).$$

Siccome in generale vale

$$\mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq \mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}, b),$$

i due sottospazi vettoriali sono uguali se e solo se hanno la stessa dimensione, cioè se e solo se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$.

Supponiamo ora che $A \cdot X = b$ sia compatibile. Il teorema di struttura per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari afferma che $S = \{\widetilde{s} + s_0 \mid s_0 \in W\}$, dove $S = \{s \in \mathbb{K}^n | A \cdot s = b\}$ è l' insieme delle soluzioni, $\widetilde{s}$ è una soluzione particolare, e

$$W = \{s_0 \in \mathbb{K}^n | A \cdot s_0 = 0\}$$

è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato. Per il Teorema della Dimensione, che vedremo in seguito, $\dim(W) = n - \mathrm{rg}(A) = n - r$. Fissiamo una base $\{v_1, \ldots, v_{n-r}\}$ di W; allora ogni soluzione si scrive nella forma seguente

$$s = \widetilde{s} + c_1 v_1 + \cdots + c_{n-r} v_{n-r},$$

al variare dei parametri $c_1, \ldots, c_{n-r} \in \mathbb{K}$. Quindi le soluzioni di $A \cdot X = b$ dipendono da $n - r$ parametri. □

2. Rango e invertibilità

Il seguente teorema afferma che una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo.

Teorema 2.1. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora A è invertibile se e solo se $\mathrm{rg}(A) = n$.*

Dimostrazione. Supponiamo che A sia invertibile. Sia $M \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice inversa di A, quindi $A \cdot M = \mathbb{I}_n$. Osserviamo che quest ultima equazione si può riscrivere come segue:

$$A \cdot M^{(i)} = e_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

dove e_i è l' i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{K}^n$. Come visto nel Lemma 1.6, questo implica che

$$e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}),$$

quindi

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_n) \subseteq \mathrm{Span}(A(1), \ldots, A(n)) \subseteq \mathbb{K}^n,$$

da cui $\mathrm{Span}(A(1), \ldots, A(n)) = \mathbb{K}^n$ e e $\mathrm{rg}(A) = n$.

Viceversa, supponiamo che $\mathrm{rg}(A) = n$, e consideriamo i sistemi lineari

$$A \cdot X = e_i,\ i = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Osserviamo che per ogni i, il rango della matrice completa $(A \mid e_i)$ soddisfa:

$$n \geq \mathrm{rg}(A \mid e_i) \geq \mathrm{rg}(A) = n,$$

quindi $\mathrm{rg}(A \mid e_i) = \mathrm{rg}(A)$. Per il Teorema di Rouché - Capelli i sistemi (2.2) sono compatibili per ogni $i = 1, \ldots, n$, e la generica soluzione dipende da $n - n = 0$ parametri, cioè è unica. Inserendo i vettori soluzione nelle colonne di una matrice si ottiene una $M \in M_n(\mathbb{K})$ tale che

$$A \cdot M = \mathbb{I}_n.$$

Con un ragionamento analogo si può dimostrare che vale anche

$$M \cdot A = \mathbb{I}_n,$$

e quindi A è invertibile e si ha

$$M = A^{-1}.$$

□

3. Calcolo della matrice inversa con l' algoritmo di Gauss

Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile, per calcolare la sua inversa A^{-1} si può procedere come segue. Ricordiamo che A^{-1} è quella matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ tale che $A \cdot M = \mathbb{I}_n$. Quindi, per ogni $i = 1, \dots, n$, la colonna i-esima $M^{(i)}$ di M è l' unica soluzione del sistema di equazioni lineari

$$A \cdot X = e_i,$$

dove $e_i \in \mathbb{K}^n$ è l' i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{K}^n$. Notiamo che è possibile risolvere questi sistemi lineari simultaneamente, per $i = 1, \dots, n$, nel seguente modo. Consideriamo la matrice

$$(A \mid \mathbb{I}_n) \in M_{n,2n}(\mathbb{K}).$$

Siccome A è invertibile, si ha $\mathrm{rg}(A) = n$. Non è difficile verificare che è possibile trasformare $(A \mid \mathbb{I}_n)$ tramite una sequenza di operazioni elementari OE1, OE2, OE3, nella matrice

$$(\mathbb{I}_n \mid M).$$

Siccome le operazioni elementari trasformano un sistema di equazioni lineari in uno equivalente, segue che la soluzione di $A \cdot X = e_i$ coincide con la soluzione di $\mathbb{I}_n \cdot X = M^{(i)}$, che è proprio $M^{(i)}$, quindi $M = A^{-1}$.

4. Rango e sottomatrici

Definizione 4.1. Sia $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e siano $p \in \{1, \dots, m\}$, $q \in \{1, \dots, n\}$. Siano inoltre $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n$. Con

$$A(i_1, \dots, i_p \mid j_1, \dots, j_q)$$

denotiamo la matrice $p \times q$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ il cui elemento di posto k, l è dato da

$$a_{i_k, j_l}, \ \forall k = 1, \dots, p, \forall l = 1, \dots, q.$$

Ogni matrice del tipo $A(i_1, \dots, i_p \mid j_1, \dots, j_q)$ si chiama sottomatrice $p \times q$ di A.

Proposizione 4.2. *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e sia B una sottomatrice $p \times q$ di A. Allora* $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$.

Dimostrazione. Omessa. □

Teorema 4.3. *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora*

$$\mathrm{rg}(A) = \max\{\mathrm{rg}(B) | B \text{ sottomatrice quadrata di } A\},$$

e anche

$$\mathrm{rg}(A) = \text{massimo degli ordini delle sottomatrici quadrate ed invertibili di } A.$$

Dimostrazione. Omessa. □