

Esercizio 3. (iii)

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo $T = 2$ che sull'intervallo $] - 1, 1]$ è uguale a $2|1 - x|$. Si determini la serie di Fourier \hat{f} di f .

Si osservi che, se $x \in] - 1, 1]$, si ha in effetti $2|1 - x| = 2 - 2x$.

Sia h la funzione periodica di periodo $T = 2$ che sull'intervallo $] - 1, 1]$ è uguale a x , e sia g la funzione periodica di periodo $T = 2\pi$ che sull'intervallo $] - \pi, \pi]$ è uguale a x .

Osserviamo che $h(x) = \frac{1}{\pi}g(\pi x)$.

Abbiamo già calcolato (Esercizio 1. (ii)) la serie di Fourier della funzione g :

$$\hat{g}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx)$$

Quindi, si ha

$$\hat{h}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(n\pi x)$$

Si conclude pertanto che

$$\hat{f}(x) = 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\pi x)$$