Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: traformate di Fourier

Prof. Franco Obersnel

($\chi_E : A \to \mathbb{C}$ è la funzione caratteristica dell'insieme E: $\chi_E(x) = 1$ se $x \in E$, $\chi_E(x) = 0$ se $x \in A \setminus E$; p_{2a} è la funzione porta di lunghezza $2a$: $p_{2a} = \chi_{[-a,a]}$; $sgn(x)$ è la funzione segno: $sgn(x) = \frac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$, $sgn(0) = 0$)

Esercizio 1 Si calcolino le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

$(i)\ \dfrac{\cos x}{1+x^2}$ $\qquad (ii)\ \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ $\qquad (iii)\ e^{-|x|} \cdot sgn(x)$

$(iv)\ \max\{1-|x|, 0\}.$ $\qquad (v)\ \dfrac{1}{9(x-1)^2+1}$ $\qquad (vi)\ e^{ax} \cdot \chi_{[0,+\infty[}(-x)$ dove $a \in \mathbb{R}^+$

Soluzioni: $(i)\ \frac{\pi}{2}\left(e^{-|\omega-1|} + e^{-|\omega+1|}\right)$; $(ii)\ -\frac{\pi i\omega}{2} e^{-|\omega|}$; $(iii)\ -\frac{2i\omega}{1+\omega^2}$;
$(iv)\ \operatorname{sinc}^2(\frac{\omega}{2\pi})$; $(v)\ \frac{\pi}{3}\, e^{-i\omega - \frac{1}{3}|\omega|}$; $(vi)\ \frac{1}{a-i\omega}$.

Esercizio 2 Si calcolino le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

$(i)\ 4ix^2e^{-x^2} - 2ie^{-x^2}$ $\qquad (ii)\ \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$ $\qquad (iii)\ \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x) \cdot \left(\frac{1}{2} - |x|\right)$

Soluzioni:
$(i)\ -i\sqrt{\pi}\omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{4}}$; $(ii)\ i\omega\pi\, p_2(\omega)$; $(iii)\ \frac{1}{4}\operatorname{sinc}^2(\frac{\omega}{4\pi})$.

Esercizio 3 Si calcoli il prodotto di convoluzione $f * g$, dove $f(x) = e^{-|x|}$ e $g(x) = p_2(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$.

Soluzioni: $f(x) = e^{-|x|}\left(e - e^{-1}\right)$ se $|x| \geq 1$; $f(x) = 2\left(1 - e^{-1}\cosh(x)\right)$ se $|x| < 1$.

Esercizio 4 Si calcolino, usando la trasformata di Fourier, gli integrali

$(i)\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4+x^2)^2}.$

$(ii)\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \operatorname{sen}(x)\, e^{-x^2}\, dx.$

Soluzioni: $(i)\ \frac{\pi}{16}$; $(ii)\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}}$.

Esercizio 5 Si usi la trasformata di Fourier per trovare una soluzione delle equazioni differenziali

$(i)\ -u'' + 4u = e^{-|x|}$; $\qquad (ii)\ -u'' + u = p_2(x)$;

$(iii)\ -u'' + 9u = e^{-x} \cdot \chi_{[0,+\infty[}(x)$ $\qquad (iv)\ u'' + xu' + u = 0$

Soluzioni: viene riportata una delle possibili infinite soluzioni.
$(i)\ \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|y|-|x-y|}\, dy$; $(ii)\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-|x-y|}\, dy$; $(iii)\ \frac{1}{6}\int_{0}^{+\infty} e^{-|y|-3|x-y|}\, dy$; $(iv)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

Esercizio 6 Si usi la trasformata di Fourier per trovare una soluzione $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ dell'equazione (alle derivate parziali) del trasporto:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c\, u_x(x,t) = 0; \\ u(x,0) = \varphi(x); \end{cases}$$

con $c > 0$ e $\varphi \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

Soluzione: $\varphi(x - ct)$.