CORSO DI GEOMETRIA
SOTTOSPAZI VETTORIALI, BASI E DIMENSIONE
A.A. 2021/2022
PROF. VALENTINA BEORCHIA

INDICE

1. SOTTOSPAZI VETTORIALI

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme non vuoto $W \subseteq V$ si dice **sottospazio vettoriale** di V se valgono le seguenti condizioni:

- (W1) per ogni $w_1 \in W$ e per ogni $w_2 \in W$ si ha
$$w_1 + w_2 \in W;$$
- (W2) per ogni $W \in W$ e per ogni scalare $a \in \mathbb{K}$ si ha
$$a \cdot w \in W.$$

Osservazione 1.2. Osserviamo che un sottospazio vettoriale W è a sua volta uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con le operazioni ereditate da V. È facile verificare che valgono gli assiomi $V1, \dots, V8$ di spazio vettoriale.

Esempio 1.3. di sottospazi vettoriali

(1) Il sottoinsieme $W = V$ risulta in modo evidente un sottospazio vettoriale, detto **sottospazio vettoriale improprio**.
(2) Il sottoinsieme formato dal solo vettore nullo $\{0\} \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale, percheé verifica $W1$ e $W2$, e si chiama **sottospazio vettoriale banale**. Osserviamo che è il più piccolo sottospazio (e anche spazio) vettoriale.
(3) Il sottoisieme di $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ costituito dalle funzioni **limitate**:
$$\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ limitata}\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$
è un sottospazio vettoriale. Ricordiamo la definizione: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice limitata se $\exists\ M > 0$, $M \in \mathbb{R}$, tale che $|f(r)| \leq M$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.
(4) Nello spazio delle funzioni
$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$
il sottoinsieme delle funzioni continue
$$\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$$
è un sottospazio vettoriale perché la somma di funzioni continue e la moltiplicazione di uno scalare per una funzione continua sono ancora funzioni continue.

Analogamente si può verificare facilmente che il sottoinsieme delle funzioni derivabili con derivata continua

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivabile e } f' \text{ continua}\}$$

è un sottospazio vettoriale.

Inoltre si ha

$$\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

e $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ risulta anche sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(5) Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Il sottoinsieme dei polinomi di grado minore o uguale a un grado fissato $d \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}[x]_{\leq d} := \{p(x) \mid \deg p(x) \leq d\}$$

risulta un sottospazio vettoriale.

Esempio 1.4. Sottoinsiemi che non sono sottospazi vettoriali

(1) La circonferenza

$$S := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + (x_2-1)^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

non è un sottospazio vettoriale; infatti, ad esempio

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in S, \text{ ma } -\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \notin S.$$

(2) In generale, ogni sottoinsieme **limitato** di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^n$ in generale non è un sottospazio vettoriale; infatti, la condizione $W2$ implica che i vettori di un sottospazio vettoriale possano assumere "lunghezze" (vedremo la definizione in seguito) arbitrariamente grandi.

(3) Le rette del piano che non passano per l'origine non sono sottospazi vettoriali, perché non contengono il vettore nullo.

(4) Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Il sottoinsieme dei polinomi di grado **uguale a un grado fissato** $d \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}[x]_d := \{p(x) \mid \deg p(x) = d\}$$

non risulta un sottospazio vettoriale, perché non verifica la $W1$. Ad esempio, la somma dei due polinomi

$$x^d - 1, \quad -x^d + 3$$

non è un polinomio di grado d: $x^d - 1 + (-x^d + 3) = 2$, polinomio costante, di grado zero.

Proposizione 1.5. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano*

$$U \subseteq V, \quad W \subseteq V$$

due suoi sottospazi vettoriali.

Allora l'intersezione

$$U \cap W \subseteq V$$

è ancora un sottospazio vettoriale.

Dimostrazione. Verifichiamo che vale la $W1$ per $U \cap W$:

siano $u_1, u_2 \in U \cap W \subseteq U$; siccome U è sottospazio vettoriale, si ha

$$u_1 + u_2 \in U.$$

Ma abbiamo anche $u_1, u_2 \in U \cap W \subseteq W$; siccome W è sottospazio vettoriale, si ha

$$u_1 + u_2 \in W.$$

Quindi $u_1 + u_2 \in U \cap W$.

Verifichaimo ora la $W2$: sia $u \in U \cap W$ e sia $c \in \mathbb{K}$; essendo $U \cap W \subseteq U$ ed essendo U sottospazio vettoriale, si ha

$$c \cdot u \in U.$$

Analogamente, essendo $U \cap W \subseteq W$ ed essendo W sottospazio vettoriale, si ha

$$c \cdot u \in W.$$

Concludiamo quindi nuovamente che $c \cdot u \in U \cap W$. □

Osservazione 1.6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano

$$U \subseteq V, \quad W \subseteq V$$

due suoi sottospazi vettoriali.
In generale l'unione

$$U \cup W$$

non è un sottospazio vettoriale.

Ci chiediamo allora quale sia il più piccolo sottospazio vettoriale contenente due dati sottospazi. Abbiamo la seguente:

Definizione 1.7. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano

$$U \subseteq V, \quad W \subseteq V$$

due suoi sottospazi vettoriali. Il **sottospazio vettoriale somma** $U + W$ è così definito:

$$U + V := \{v \in V \mid \exists u \in U, \exists w \in W, \text{ tali che } v = u + w\},$$

è dato cioè da tutte le possibili somme di vettori di U con vettori di W.

Lemma 1.8. *Il sottospazio somma $U + W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale.*
Inoltre, $U + W$ è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente $U \cup W$.

Dimostrazione. Esercizio. □

2. Combinazioni lineari e sottospazi vettoriali finitamente generati

Definizione 2.1. Dati $v_1, \dots, v_k \in V$, una **combinazione lineare** di $v_1, \dots, v_k$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è un vettore del tipo

$$c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k \in V, \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}.$$

Definizione 2.2. Se $v_1, \dots, v_k \in V$ è un numero finito di vettori di V, definiamo

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) := \{a_1 \cdot v_1 + \dots a_k \cdot v_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}\},$$

che risulta un sottospazio vettoriale (verificare per esercizio).

Esempio 2.3.

- Sia V uno spazio vettoriale non banale, e sia $v \in V$ un vettore non nullo: $v \neq 0$. Allora

  $$\mathrm{Span}(v) = \{c \cdot v \mid c \in \mathbb{K}\},$$

  consiste cioè di tutti i vettori proporzionali a v. Il sottospazio vettoriale $\mathrm{Span}(v)$ viene chiamato **retta vettoriale**, e il vettore v viene chiamato **generatore**.
- Sia V uno spazio vettoriale non banale e siano $v, w \in V$ due vettori non nulli: $v \neq 0$, $w \neq 0$. Allora

  $$\mathrm{Span}(v, w) = \{a \cdot v + b \cdot w \mid a \in \mathbb{K}, b \in \mathbb{K}\},$$

  consiste cioè di tutte le possibili somme di vettori proporzionali a v e w.

  Nel caso che w non sia proporzionale a v, $\mathrm{Span}(v, w)$ viene chiamato **piano vettoriale**. Nel caso che w sia invece proporzionale a v, si può verificare facilmente che vale

  $$w = c \cdot v \Rightarrow \mathrm{Span}(v, w) = \mathrm{Span}(v) = \mathrm{Span}(w),$$

  quindi si ottiene nuovamente una retta vettoriale.

Osservazione 2.4. Osserviamo, in particolare, che i vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$; infatti, si ha

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k, v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k, \dots,$$

$$v_k = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_k.$$

Inoltre, per ogni $l < k$, abbiamo

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l) \subseteq \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k).$$

Infatti, ogni $v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l)$ soddisfa

$$v = c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + \cdots + c_l \cdot v_l,$$

e tale relazione si può riscrivere nella forma:

$$v = c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + \cdots + c_l \cdot v_l + 0 \cdot v_{l+1} + \cdots + 0 \cdot v_k,$$

quindi v è anche combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$.

Notiamo, però, che $l < k$ non implica, in generale,

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l) \subsetneq \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k),$$

come ad esempio nel seguente caso:

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Esempio 2.5.

- Consideriamo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Osserviamo che il vettore $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ si puó scrivere come combinazione lineare di v_1 e v_2:

$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 - 2v_2,$$

quindi $w \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$.

Sia ora $v \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ un vettore qualunque. Ci chiediamo se $v \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, cioé se esistano due coefficienti λ_1 e λ_2 tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Per determinare l'esistenza di λ_1 e λ_2 dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = c \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 & = d. \end{cases}$$

La matrice completa $(A|b)$ associata al sistema lineare é

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & c \\ 2 & 1 & | & d \end{pmatrix}.$$

Con l' operazione elementare $(A|b)_{(2)} - 2(A|b)_{(1)}$ riduciamo la matrice a scala e otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & c \\ 0 & 3 & | & d - 2c \end{pmatrix}.$$

Il sistema lineare ha (un'unica) soluzione

$$\lambda_1 = \frac{d + c}{3}, \qquad \lambda_2 = \frac{d - 2c}{3}.$$

Osserviamo che nel caso particolare di prima $c = 3$ e $d = 0$ si ottiene effettivamente $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$.

Come conseguenza abbiamo che ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$ verifica $v \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, quindi

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}(v_1, v_2),$$

cioé v_1 e v_2 sono dei generatori per $\mathbb{R}^2$.

- Consideriamo i due vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

In questo caso abbiamo che

$$\mathbb{R}^3 \neq \mathrm{Span}(v_1, v_2).$$

Infatti, il vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2).$$

Infatti, verifichiamo che non esistono λ_1 e λ_2 tali che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice completa associata al sistema lineare è

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l' operazione elementare $(A|b)_{(2)} - (A|b)_{(1)}$ otteniamo

$$(A'|b') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

e ora con $(A'|b')_{(3)} - (A'|b')_{(2)}$ abbiamo la seguente matrice a scala:

$$(A''|b'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix},$$

che corrisponde a un sistema lineare incompatibile (senza soluzioni), perché l'ultima riga corrisponde ad un'equazione del tipo $0 = 1$.

Esempio 2.6. Vediamo un esempio di due sottospazi vettoriali, la cui unione non è un sottospazio vettoriale: sia $V = \mathbb{R}^2$ e siano

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \{a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\},$$

e

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \{b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Osserviamo che i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U \cup W,$$

ma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U \cup W.$$

Infatti, si ha $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$ perché non è del tipo $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ per alcun $a \in \mathbb{R}$. Inoltre, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W$ perché non è del tipo $\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$ per alcun $b \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.7. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e siano

$$v_1, \ldots, v_k \in V$$

vettori di V. Diremo che $v_1, \ldots, v_k$ **generano** V se

$$V = \text{Span}\,(v_1, \ldots, v_k),$$

e quindi per ogni vettore $v \in V$ esistono dei coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tali che

$$v = \lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_k\, v_k.$$

In questo caso V si dirà **finitamente generato**.

Osservazione 2.8. Nel caso in cui $V = \mathbb{K}^n$, possiamo stabilire se k vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono dei generatori per $\mathbb{K}^n$ studiando un sistema lineare. Più precisamente, se esprimiamo i vettori $v_1, \ldots, v_k$ in componenti:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix},$$

allora un vettore $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ è una loro combinazione lineare se si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \cdots + c_k a_{1k} \\ c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + \cdots + c_k a_{2k} \\ \vdots \\ c_1 a_{n1} + c_2 a_{n2} + \cdots + c_k a_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}.$$

Se poniamo

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix},$$

abbiamo che v è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_k$ se e solo se il sistema lineare

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ammette almeno una soluzione $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$, cioè se e solo se $A \cdot X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ è compatibile.

3. Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione 3.1. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$; essi si dicono **linearmente dipendenti** se uno di loro si può scrivere come combinazione lineare degli altri.

Esempio 3.2. I vettori di $\mathbb{R}^2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti, perché $v_3 = 2v_1 + v_2$, ma v_1 e v_2 non sono linearmente dipendenti, e nemmeno v_1 e v_3, così come v_2 e v_3 non sono linearmente dipendenti (verificare).

Definizione 3.3. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$; essi si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti.

La dipendenza e l'indipendenza lineari possono essere caratterizzate nel modo seguente, che può essere scelto come definizione alternativa:

Proposizione 3.4. *I vettori $v_1, \dots, v_k \in V$ sono linearmente dipendenti $\iff$ esiste una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli che dia il vettore nullo:*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0, \quad a_i \text{ non tutti nulli.}$$

Conseguentemente abbiamo:

Proposizione 3.5. *I vettori $v_1, \dots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti $\iff$ l' unica loro combinazione lineare che dia il vettore nullo è quella con tutti i coefficienti nulli:*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Osservazione 3.6.

(1) Nel caso $k = 1$, abbiamo che un vettore v_1 è linearmente dipendente $\iff$ esiste una combinazione lineare

$$a_1 v_1 = 0,$$

con $a_1 \neq 0$, cioè $\iff$ $v_1 = 0$ è il vettore nullo.

Conseguentemente, v_1 è linearmente indipendente $\iff$ $v_1 \neq 0$.

(2) Due vettori v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti $\iff$ esiste $c \in \mathbb{K}$ tale che

$$v_2 = cv_1, \quad \text{oppure } v_1 = cv_2,$$

cioè $\iff$ v_1 e v_2 sono **proporzionali**.

Come conseguenza, due vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti $\iff$ non sono proporzionali.

(3) Consideriamo dei vettori $v_1, \dots, v_k$ e supponiamo che uno di essi sia nullo:

$$v_i = 0.$$

Allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti; infatti si ha

$$0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + 0 \cdot v_k = 0$$

è una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli, che dà il vettore nullo.

(4) Se tra i vettori $v_1, \dots, v_k$ ce ne sono due uguali

$$v_i = v_j,$$

allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti; infatti, la combinazione lineare

$$0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + (-1)v_j + \cdots + 0 \cdot v_k =$$

$$= 0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + (-1)v_i + \dots 0 \cdot v_k = 0$$

dà luogo al vettore nullo e non tutti i coefficienti sono nulli.

Osservazione 3.7. Nel caso in cui $V = \mathbb{K}^n$, possiamo stabilire se k vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti studiando un sistema omogeneo di equazioni lineari. Più precisamente, se esprimiamo i vettori $v_1, \dots, v_k$ in componenti:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \qquad \dots, \qquad v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix},$$

allora una loro combinazione lineare si può scrivere come

$$c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1a_{11} + c_2a_{12} + \cdots + c_ka_{1k} \\ c_1a_{21} + c_2a_{22} + \cdots + c_ka_{2k} \\ \vdots \\ c_1a_{n1} + c_2a_{n2} + \cdots + c_ka_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}.$$

Se poniamo

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix},$$

abbiamo che $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$A \cdot X = 0$$

ammette una soluzione non banale $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$.

Infine, possiamo equivalentemente affermare che $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$A \cdot X = 0$$

ammette solo la soluzione banale (la soluzione nulla).

4. Basi

Abbiamo osservato che quando uno dei vettori considerati è combinazione lineare degli altri, esso è irrilevante ai fini dello spazio generato. È quindi naturale cercare di considerare solo insiemi *minimali* di generatori, cioè insiemi in cui togliendo un qualunque vettore, lo spazio generato dai rimanenti è strettamente più piccolo. Queste considerazioni inducono a dare la seguente definizione.

Definizione 4.1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme di vettori

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

si dice **base di** V (finita) se valgono le seguenti:

(1) (B1) $v_1, \dots, v_n$ generano V;
(2) (B2) $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Proposizione 4.2. *Un sottoinsieme* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *di* V *è una base di* V *se e solo se per ogni ettore* $v \in V$*, esistono e sono unici dei coefficienti* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *tali che*

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

In tal caso gli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *si chiamano* **coordinate di** v **nella base** $\{v_1, \dots, v_n\}$*.*

Dimostrazione. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Poiché sono dei generatori di V, ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come combinazione lineare

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Supponiamo che si abbia anche

$$v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n.$$

Sottraendo la seconda equazione alla prima otteniamo

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) v_n.$$

Essendo $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base, i vettori sono anche linearmente indipendenti, quindi si ha

$$\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n,$$

da cui la tesi.

Viceversa, supponiamo che ogni vettore di V si possa esprimere in modo unico nella forma

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Da ciò segue, in particolare, che i vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ formano un insieme di generatori di V.

Mostriamo infine che sono linearmenet indipendenti. Consideriamo una loro combinazione lineare che dia il vettore nullo:

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0.$$

Siccome il vettore nullo ammette la rappresentazione

$$0 = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n,$$

per l'ipotesi di unicità della rappresentazione di ogni vettore come combinazione lineare dei vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$, si ha che necessariamente

$$c_1 = 0, \dots, c_n = 0,$$

quindi $v_1, \dots, v_n$ sono anche linearmente indipendenti, e formano una base. □

Esempio 4.3. Sia $V = \mathbb{K}^n$. Allora si ha una base naturale, detta **base canonica** $\mathcal{E}$ **di** $\mathbb{K}^n$**:**

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Infatti, i vettori di $\mathcal{E}$ formano un insieme di generatori; dato un vettore

$$v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

arbitrario, esso si esprime come combinazione lineare nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, vediamo subito che i vettori di $\mathcal{E}$ sono linearmente indipendenti; infatti, usando il criterio 3.7, osserviamo che la matrice A le cui colonne sono formate da $e_1, \dots, e_n$ corrisponde alla matrice unità $A = \mathbb{I}_n$, e il sistema lineare omogeneo

$$\mathbb{I}_n \cdot X = 0$$

ammette solo la soluzione nulla.

Osservazione 4.4. Sottolineiamo nell' esempio precedente che nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{K}^n$ le **coordinate di un vettore coincidono con le sue componenti**.

Esempio 4.5. Una base per lo spazio vettoriale delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{K})$ è data da

$$E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \; E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \; \dots, E_{mn} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

ovvero dalle matrici E_{ij} che hanno il coefficiente 1 nella posizione i, j e zero altrove.

Infatti, ogni matrice $A = (a_{ij})$ si può scrivere in modo unico come

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \cdots + a_{mn}E_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

Anche questa base viene detta **base canonica dello spazio delle matrici**.

5. Teoremi di estrazione e di completamento

Teorema 5.1. Estrazione di una base da un insieme di generatori *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, e siano $v_1, \dots, v_k$ dei generatori per V. Allora esiste una base $\mathcal{B} \subseteq \{v_1, \dots, v_k\}$ di V.*

Per la dimostrazione di questo risultato abbiamo bisogno di due Lemmi.

Lemma 5.2. *Siano $u_1, \dots, u_l \in V$ e sia*

$$u \in \operatorname{Span}(u_1, \dots, u_l).$$

Allora $\operatorname{Span}(u_1, \dots, u_l) = \operatorname{Span}(u_1, \dots, u_l, u)$.

Dimostrazione. L' inclusione $\operatorname{Span}(u_1, \dots, u_l) \subseteq \operatorname{Span}(u_1, \dots, u_l, u)$ è sempre verificata.

Dimostriamo quindi l'altra inclusione. Sia $w \in \operatorname{Span}(u_1, \dots, u_l, u)$ un vettore arbitrario. Quindi

$$w = b_1u_1 + \cdots + b_lu_l + bu, \tag{5.1}$$

per opportuni coefficienti $b_1, \dots, b_l, b \in \mathbb{K}$.

Per ipotesi su u possiamo scrivere

$$u = c_1u_1 + \cdots + c_lu_l.$$

Quindi la (5.1) può essere riscritta nella forma

$$w = b_1u_1 + \cdots + b_lu_l + b(c_1u_1 + \cdots + c_lu_l) = (b_1 + bc_1)u_1 + \cdots + (b_l + bc_l)u_l,$$

ovvero w si può esprimere anche come combinazione lineare dei vettori $u_1, \dots, u_l$. Quindi abbiamo dimostrato che $\operatorname{Span}(u_1, \dots, u_l) \supseteq \operatorname{Span}(u_1, \dots, u_l, u)$. □

Lemma 5.3. *Siamo $u_1, \dots, u_h \in V$ dei vettori linearmente indipendenti, e sia*

$$u \notin \operatorname{Span}(u_1, \dots, u_h).$$

Allora $u_1, \dots, u_h, u$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $u_1, \dots, u_l, u$ siano linearmente dipendenti e sia

$$c_1 u_1 + \cdots + c_h u_h + cu = 0 \tag{5.2}$$

una combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli, che dia il vettore nullo.

Osserviamo che se $c = 0$, allora abbiamo una combinazione lineare

$$c_1 u_1 + \cdots + c_h u_h = 0$$

a coefficienti non tutti nulli, e questo è un assurdo perché si contraddice l'ipotesi $u_1, \dots, u_h$ linearmente indipendenti.

Quindi supponiamo che sia $c \neq 0$; dalla (5.2) otteniame

$$u = \frac{c_1}{c} u_1 + \dots \frac{c_h}{c} u_h,$$

cioè u è combinazione lineare di $u_1, \dots, u_h$, e questo è un assurdo perché contraddice l'ipotesi $u \notin \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_h)$. □

Dimostrazione. **del Teorema di Estrazione** Consideriamo il seguente **algoritmo**:

- consideriamo v_1:
  - se $v_1 = 0$, lo scartiamo;
  - se $v_1 \neq 0$, lo scegliamo: $v_1 \in \mathcal{B}$;
- consideriamo v_2:
  - se $v_2 \in \mathrm{Span}(v_1)$, lo scartiamo; per il Lemma 5.2, si ha $\mathrm{Span}(v_1) = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$;
  - se $v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1)$, lo scegliamo: $v_2 \in \mathcal{B}$; per il Lemma 5.3, si ha che i vettori finora scelti sono linearmente indipendenti;
- consideriamo v_3:
  - se $v_3 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, lo scartiamo; per il Lemma 5.2, si ha $\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$
  - se $v_3 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, lo scegliamo: $v_3 \in \mathcal{B}$; per il Lemma 5.3, si ha che i vettori finora scelti sono linearmente indipendenti;
- consideriamo v_i:
  - se $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_{i-1})$, lo scartiamo; per il Lemma 5.2, si ha $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i)$;
  - se $v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_{i-1})$, lo scegliamo: $v_i \in \mathcal{B}$; per il Lemma 5.3, si ha che i vettori finora scelti sono linearmente indipendenti.

In questo modo, dopo k passi, l'algoritmo si conclude. Per il Lemma 5.3, si ha che i vettori scelti sono linearmente indipendenti. Inoltre, per il Lemma 5.2 i vettori scartati non modificano lo spazio generato, quindi i vettori scelti formano ancora un insieme di generatori per V. □

Corollario 5.4. *Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette una base.*

Osservazione 5.5. Non tutti gli spazi vettoriali sono finitamente generati. Ad esempio lo spazio dei polinomi in una indeterminata a coefficienti reali

$$V = \mathbb{R}[x]$$

non lo è .

Infatti, se per assurdo fosse

$$\mathbb{R}[x] = \mathrm{Span}(P_1(x), \dots, P_k(x)),$$

ponendo

$$N := \max\{\text{grado } P_i(x) \mid i = 1, \dots, k\},$$

avremmo che $\mathbb{R}[x]$ contiene solo polinomi di grado $\leq N$.

Teorema 5.6. Completamento di vettori linearmente indipendenti a una base *Siano $v_1, \dots, v_p \in V$ dei vettori linearmente indipendenti e supponiamo che V sia finitamente generato.*

Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che

$$\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathcal{B}.$$

Diremo che abbiamo **completato** *l'insieme* $\{v_1, \dots, v_p\}$ *a una base di* V.

Dimostrazione. Essendo V finitamente generato per ipotesi, posiamo scegliere dei generatori $w_1, \dots, w_r$ per V:

$$V = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_r).$$

Aggiungendo i vettori $v_1, \dots, v_p$, l' insieme ottenuto forma ancora un insieme di generatori:

$$V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r).$$

Applichiamo ora il Teorema di Estrazione di una base da $v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r$ e osserviamo che nell' algoritmo della dimostrazione, per costruzione i vettori $v_1, \dots, v_p$ sono scelti. Quindi nella costruzione della base $\mathcal{B}$ si avrà necessariamente

$$\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathcal{B}.$$

□

6. Dimensione

In questa sezione vogliamo definire la dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato. Per questo proposito vediamo un risultato che ci permetterà di dedurre che ogni base di uno spazio vettoriale finitamente generato ha lo stesso numero di elementi.

Lemma 6.1. di Steinitz *Sia* V *uno spazio vettoriale e sia* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *una base di* V.
Allora $\forall p > n$ *e per ogni scelta di vettori* $w_1, \dots, w_p$, *essi sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. I vettori $w_1, \dots, w_p$ si scrivono in modo unico come combinazioni lineari dei vettori della base $\{v_1, \dots, v_n\}$:

$$\begin{aligned} w_1 = &\quad c_{11}v_1 + c_{21}v_2 + \dots + c_{n1}v_n, \\ w_2 = &\quad c_{12}v_1 + c_{22}v_2 + \dots + c_{n2}v_n, \\ \vdots &\quad \vdots \\ w_p = &\quad c_{1p}v_1 + c_{2p}v_2 + \dots + c_{np}v_n. \end{aligned}$$

Denotiamo con $\begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$ la colonna delle coordinate di w_i.

Una combinazione lineare $a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_pw_p = 0$ dà il vettore nullo se e solo se le coordinate dei vettori w_i soddisfano

$$a_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix} + \dots + a_p \begin{pmatrix} c_{1p} \\ c_{2p} \\ \vdots \\ c_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi se e solo se

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Quindi $w_1, \dots, w_p$ sono linearmente dipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np} \end{pmatrix} \cdot X = 0$$

di n equazioni in p incognite ha una soluzione non nulla.

Per l' ipotesi $p > n$, vediamo che la generica soluzione dipende da almeno $p - n \geq 1$ parametri; fissando per tali parametri dei valori non nulli, si ottiene una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo. $\square$

Come conseguenza si ha il seguente importante risultato.

Teorema 6.2. *Sia V uno spazio vettoriale. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ sono due basi di V, allora*

$$n = m.$$

Dimostrazione. Essendo $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $w_1, \dots, w_m$ linearmente indipendenti, per il Lemma 6.1 di Steinitz si ha

$$m \leq n.$$

Infatti, se si avesse $m > n$, i vettori $w_1, \dots, w_m$ sarebbero linearmente dipendenti.
Analogamente, essendo $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base e $v_1, \dots, v_n$ linearmente indipendenti, si ha

$$n \leq m,$$

da cui la tesi.

$\square$

Definizione 6.3. Dato uno spazio vettoriale V, definiamo la **dimensione di** V come segue:
- se $V = \{0\}$, poniamo $\dim V := 0$;
- se $V \neq \{0\}$ e V è finitamente generato, poniamo $\dim V :=$ numero di vettori di una sua qualunque base.

Esempio 6.4. Per $V = \mathbb{K}^n$ abbiamo visto che c'è la base canonica $\mathcal{E}$, che consta di n vettori, quindi

$$\dim \mathbb{K}^n = n.$$

Esempio 6.5. In $V = M_{m,n}(\mathbb{K})$ c'è la base canonica, che consta di $m \cdot n$ vettori, quindi

$$\dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n.$$

Esempio 6.6. Consideriamo il campo complesso $\mathbb{C}$. Esso è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ stesso, e come tale ha dimensione

$$\dim \mathbb{C} = 1.$$

Osserviamo, pero', che $\mathbb{C}$ si può dotare anche di una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ come segue:

$$+ \; : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

dove la somma è quella usuale tra numeri complessi, e la moltiplicazione per uno scalare reale è definita da

$$\cdot \; : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad c \cdot (a + ib) = ac + ibc.$$

Con questa struttura, una base di $\mathbb{C}$ è data da

$$\{1, i\},$$

e quindi

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$$

Vediamo ora che in uno spazio di cui si conosce la dimensione, per individuare una sua base non è necessario verificare sia di avere dei generatori sia l'indipendenza lineare.

Proposizione 6.7. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione*

$$\dim V = n.$$

Allora valgono le seguenti:

(1) se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ formano una base di V; in particolare, sono anche dei generatori per V.

(2) se $v_1, \dots, v_n$ sono dei generatori per V $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ formano una base di V, in particolare sono anche linearmente indipendenti.

Dimostrazione. (1) Siccome $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, per il Teorema di Completamento si possono completare a una base di V. Essendo $\dim V = n$, ogni base di V ha esattamente n vettori, quindi non è necessario aggiungere alcun vettore all' insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$, che risulta una base. In particolare, $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di generatori.

(2) Se $v_1, \dots, v_n$ sono un insieme di generatori per V, per il Teorema di Estrazione da essi si può estrarre una base di V. Essendo $\dim V = n$, ogni base di V ha esattamente n vettori, quindi non è necessario scartare alcun vettore dall' insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$, che risulta una base. In particolare, $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

□

Esempio 6.8. In particolare, sapendo che $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, per trovare una base di $\mathbb{R}^2$ è sufficiente scegliere 2 vettori linearmente indipendenti, cioè 2 vettori non nulli e non proporzionali.

7. Dimensione di sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $W \subseteq V$ un suo sottospazio vettoriale. In questa sezione daremo una limitazione sulla dimensione di W.

Osservazione 7.1. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e consideriamo W come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Se $w_1, \dots, w_k \in W$ sono vettori linearmente indipendenti in $W \Rightarrow w_1, \dots, w_k$ sono linearmente indipendenti anche in V.

Infatti, essendo entrambi W e V spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, la condizione di indipendenza lineare come vettori di W o di V è la stessa.

Osservazione 7.2. Se V è finitamente generato e $W \subseteq V$ è un suo sottospazio vettoriale $\Rightarrow$ anche W è finitamente generato.

Infatti, sia $\dim V = n$, e fissiamo $w_1, \dots, w_k \in W$ vettori linearmente indipendenti in W. Se $W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$, allora W è finitamente generato.

Se $W \supsetneq \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$, allora possiamo scegliere un vettore

$$w_{k+1} \notin \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k), \quad w_{k+1} \in W.$$

Per il Lemma 5.3, i vettori $w_1, \dots, w_k, w_{k+1}$ sono linearmente indipendenti. Ripetiamo il procedimento. Siccome per l' Osservazione 7.1 vettori linearmente indipendenti in W sono anche linearmente indipendenti in V, e siccome in V ci sono al più n vettori linearmente indipendenti per il Lemma 6.1 di Steinitz, il procedimento termina dopo un numero finito di passi. Quindi troviamo un numero finito di vettori di W che generano W.

Corollario 7.3. *Ogni sottospazio vettoriale W di V, spazio vettoriale finitamente generato, è del tipo*

$$W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_m)$$

per opportui vettori $w_1, \dots, w_m \in W$.

Proposizione 7.4. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Allora valgono:*

(1) $\dim W \leq \dim V$;
(2) $\dim W = \dim V \iff W = V$.

Dimostrazione. (1) Sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base di W. I vettori $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente indipendenti anche in V, per l' Osservazione 7.1. Per il Teorema di Completamento, possiamo completare l' insieme $\{w_1, \dots, w_k\}$ a una base $\mathcal{B}$ di V. Quindi si ha

$$\dim W = \#\{w_1, \dots, w_k\} \leq \#\mathcal{B} = n = \dim V.$$

(2) Se $W = V$, è chiaro che hanno la stessa dimensione.

Viceversa, supponiamo $\dim W = \dim V = n$, e fissiamo una base $\{w_1, \dots, w_n\}$ di W. Per l' Osservazione 7.1 i vettori $w_1, \dots, w_n$ sono linearmente indipendenti anche in V. Infine, essi formano una base di V per la Proposizione 6.7, primo punto. Quindi

$$W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_n) = V.$$

□

8. Formula di Grassmann

In questa sezione vediamo una formula che lega la dimensione di un'intersezione di sottospazi vettoriali con la dimensione del sottospazio somma.

Teorema 8.1. Formula di Grassmann *Siano*

$$W_1 \subseteq V, \quad W_2 \subseteq V$$

due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora vale

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2). \tag{8.1}$$

Dimostrazione. Fissiamo una base di $W_1 \cap W_2$:

$$\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \{w_1, \dots, w_r\}, \quad r = \dim W_1 \cap W_2.$$

Essendo $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$ un sottospazio vettoriale, per il Teorema del Completamento, possiamo completare i vettori $w_1, \dots, w_r$ ad una base di W_1:

$$\mathcal{B}_{W_1} = \{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s\}, \quad r + s = \dim W_1.$$

Analogamente, essendo $W_1 \cap W_2 \subseteq W_2$ un sottospazio vettoriale, per il Teorema del Completamento, possiamo completare i vettori $w_1, \dots, w_r$ ad una base di W_2:

$$\mathcal{B}_{W_2} = \{w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_k\}, \quad r + k = \dim W_2.$$

Vogliamo dimostrare che

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = r + s + r + k - r = r + s + k.$$

A tale scopo affermiamo che

$$\mathcal{B}_{W_1} \cup \mathcal{B}_{W_2} = \{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_k\}$$

è una base di $W_1 + W_2$.

Infatti, $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_k\}$ sono dei generatori per $W_1 + W_2$: sia $w \in W_1 + W_2$; per definizione di spazio somma, w si può scrivere nella forma

$$w = z_1 + z_2, \quad z_1 \in W_1, \quad z_2 \in W_2,$$

per opportuni vettori z_1 e z_2. I due vettori, a loro volta, si possono scrivere come combinazioni lineari delle basi di W_1 e W_2, rispettivamente:

$$z_1 = a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r + b_1 v_1 + \cdots + b_s v_s, \quad z_2 = c_1 w_1 + \cdots + c_r w_r + d_1 u_1 + \cdots + d_k u_k,$$

e quindi

$$w = (a_1 + c_1) w_1 + \cdots + (a_r + c_r) w_r + b_1 v_1 + \cdots + b_s v_s + d_1 u_1 + \cdots + d_k u_k,$$

cioè ogni vettore di $W_1 + W_2$ è combinazione lineare dei $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_k\}$.

Mostriamo, infine, che $w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_k$ sono linearmente indpendenti. Considerimao una loro combinazione lineare che dia il vettore nullo:

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s + \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_k u_k = 0. \tag{8.2}$$

Questa relazione può essere riscritta nella forma

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s = -\delta_1 u_1 - \cdots - \delta_k u_k,$$

quindi il vettore $-\delta_1 u_1 - \cdots - \delta_k u_k \in W_2$ è anche combinazione lineare dei vettori della base di W_1, quindi

$$-\delta_1 u_1 - \cdots - \delta_k u_k \in W_1 \cap W_2.$$

Come conseguenza può essere scritto come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2}$:

$$-\delta_1 u_1 - \cdots - \delta_k u_k = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_r w_r,$$

da cui

$$\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_r w_r + \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_k u_k = 0.$$

Quest'ultima è una combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}_{W_2}$, che sono linearmente indipendenti, quindi

$$\gamma_1 = \cdots = \gamma_r = \delta_1 = \cdots = \delta_k = 0.$$

Quindi la relazione (8.2) diventa

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s = 0,$$

che è una combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}_{W_1}$, che sono linearmente indipendenti, quindi

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots = \beta_s = 0.$$

□

Corollario 8.2. *Siano*

$$W_1 \subseteq V, \quad W_2 \subseteq V$$

due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale con $\dim V = n$. *Allora vale*

(8.3) $$\dim(W_1 \cap W_2) \geq \dim W_1 + \dim W_2 - n.$$

Dimostrazione. Basta osservare che essendo $W_1 + W_2 \subseteq V$, per la Proposizione 7.4, primo punto, si ha

$$\dim W_1 + W_2 \leq n.$$

□

Esempio 8.3. In particolare, se W_1 e W_2 sono due piani vettoriali di $\mathbb{R}^3$, abbiamo che

$$\dim(W_1 \cap W_2) \geq 2 + 2 - 3 = 1,$$

cioè due piani vettoriali si intersecano sempre almeno lungo una retta vettoriale.