Gruppi liberi

X insieme $\rightsquigarrow$ $\underbrace{x_1^{a_1} \cdots x_s^{a_s}}_{\text{Parola in } X}$, $x_i \in X$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$

$s = 0 \rightsquigarrow$ parola vuota (si denota con 1)

Una parola è ridotta se $x_i \neq x_{i+1}$ $\forall\, i = 1, \dots, s-1$, oppure se è vuota. Le parole si possono ridurre:
$\cdots x^a x^b \cdots \rightsquigarrow \cdots x^{a+b} \cdots$; $x^0 \rightsquigarrow 1$; $\cdots 1 \cdots \rightsquigarrow \cdots$ $\cdots$.

OSS Le parole si possono concatenare ottenendo un'operazione binaria associativa sull'insieme delle parole su X.

Def L'insieme $F(X) \overset{\text{def}}{=} \{\text{parole ridotte su } X\}$ è un gruppo rispetto alla concatenazione e successiva riduzione, detto gruppo libero generato da X. L'elemento neutro di $F(X)$ è la parola vuota. Poniamo $F_n \overset{\text{def}}{=} F(\{1, \dots, n\})$.
n è detto rango

OSS $X \subset F(X)$ (come sottoinsieme).

$F(\emptyset) \cong \{1\}$ è il gruppo banale

$F_1 = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cong \mathbb{Z}$ è ciclico infinito

$F(X)$ non abeliano se $\# X \geq 2$:

$x_1 x_2 \neq x_2 x_1 \quad \forall\, x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$.

Più in generale un gruppo F è detto libero su un sottoinsieme $X \subset F$ se $\exists\, \varphi : F \xrightarrow{\cong} F(X)$ isomorfismo t.c. $\varphi(X) = X$.

Proprietà universale dei gruppi liberi Un gruppo F è libero $\iff \exists\, X \subset F$ sottoinsieme t.c. $\forall$ gruppo G e $\forall$ funzione $f : X \to G$ $\exists!$ omomorfismo $\tilde{f} : F \to G$ che estende f : $\tilde{f}(x) = f(x)$ $\forall\, x \in X$. Se questo si verifica, F è libero su X.

Corollario Ogni gruppo è isomorfo ad un quoziente di un gruppo libero.

__Dim__ Sia G un gruppo $\rightsquigarrow$ $\exists!$ omomorfismo $\varphi : F(G) \to G$ che estende la funzione $id_G \Rightarrow$ φ epimorfismo $\Rightarrow$ $G \cong F(G)/_{\operatorname{Ker}\varphi}$.

__Es__ F_2 ha come elementi tutte le parole ridotte in un alfabeto di due lettere x, y :

1 (= parola vuota), $x, y, x^2, xy, yx, y^2, x^{-1},$

$xyx^{-3}y^4x^{-1}y^{-7}, \dots$

Presentazione di gruppi

Se F è un gruppo e $R \subset F$ sottoinsieme, indichiamo con $\triangleleft R \triangleright$ il __sottogruppo normale__ di F generato da R.

Def Sia G un gruppo e supponiamo che $G \cong F(X)/\triangleleft R \triangleright$ dove X è un insieme e $R \subset F(X)$. La coppia $\langle X \mid R \rangle$ è detta __presentazione__ di G. Gli elementi di X sono detti __generatori__ e quelli di R __relazioni__.

Es $\langle x \mid x^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$; $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$

$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \cong F_n$

$\langle x \mid x^n \rangle \cong \mathbb{Z}_n$; $\langle x, y \mid [x,y] \rangle \cong \mathbb{Z}^2$

NB In un gruppo G si pone $[x,y] \overset{def}{=} x y x^{-1} y^{-1}$ (commutatore di x e $y \in G$).

Le relazioni si possono anche scrivere come equazioni: $a=b$ significa ab^{-1} (ovvero $ab^{-1}=1$).

Es $\langle x, y, z \mid x^2 y^3 = z x^{-1} \rangle = \langle x, y, z \mid x^2 y^3 x z^{-1} \rangle$

Def Un gruppo G è finitamente presentato se G ammette una presentazione con un numero finito di generatori e relazioni (presentazione finita).

Es gruppi finiti ; F_n ; gli esempi visti sopra.

Ma finitamente generato $\not\Rightarrow$ finitamente presentato.

Prodotti liberi di gruppi

$G_1 = \langle X_1 \mid R_1 \rangle$, $G_2 = \langle X_2 \mid R_2 \rangle$ con $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

$\rightsquigarrow$ $G_1 * G_2 \overset{def}{=} \langle X_1 \cup X_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle$.

prodotto libero di G_1 e G_2

OSS G_1 e G_2 sono sottogruppi di $G_1 * G_2$ $\Rightarrow$ gli elementi di $G_1 * G_2$ sono parole in $G_1 \cup G_2$ che vanno ridotte eliminando 1_{G_1} e 1_{G_2} e "semplificando" termini consecutivi nello stesso gruppo.

OSS Il prodotto libero è associativo a meno di isomorfismo $\rightsquigarrow G_1 * G_2 * \cdots * G_n$.

Es $F_m * F_n \cong F_{m+n}$

$$F_n \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}$$

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 \cong \langle x, y \mid y^2 \rangle$$

$$\mathbb{Z}_m * \mathbb{Z}_n \cong \langle x, y \mid x^m, y^n \rangle.$$

Proprietà universale del prodotto libero

Siano G_1 e G_2 due gruppi. Per ogni gruppo H e per ogni $\varphi_1 : G_1 \to H$, $\varphi_2 : G_2 \to H$ omomorfismi, $\exists!\ \Phi : G_1 * G_2 \to H$ omomorfismo che estende φ_1 e φ_2.

OSS Implica l'unicità del prodotto libero a meno di $\cong$.

Calcolo di $\pi_1(X)$

Teorema di Seifert - Van Kampen Sia $X = U \cup V$ uno spazio con $U, V, U \cap V$ aperti non vuoti e connessi per archi. Allora

$$\pi_1(X) \cong \frac{\pi_1(U) * \pi_1(V)}{\lhd \{ i_*(z)\, j_*(z)^{-1} \mid z \in \pi_1(U \cap V) \} \rhd}$$

dove $i : U \cap V \hookrightarrow U$ e $j : U \cap V \hookrightarrow V$ sono le inclusioni e $* \in U \cap V$.

Corollario Sia $X = U \cup V$ come nel teorema. Allora:

i) $\pi_1(U \cap V) \cong 0 \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V)$.

ii) $\pi_1(U) \cong \pi_1(V) \cong 0 \Rightarrow \pi_1(X) \cong 0$.

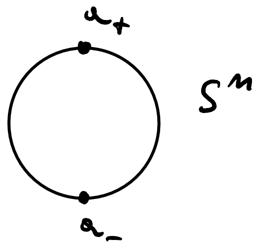
Corollario S^n è semplicemente connesso $\forall n \geq 2$.

Dim $a_\pm = (0, \dots, 0, \pm 1) \in S^n$, $U_\pm = S^n - \{a_\pm\}$ aperti

$S^n = U_+ \cup U_-$

$U_+ \cong U_- \cong R^n$

$U_+ \cap U_- \cong R^n - \{0\} \simeq S^{n-1}$ conn. p.a. se $n-1 \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 2$.



$\Rightarrow \pi_1(S^n) \cong 0 \quad (n \geq 2)$.

Corollario $R^m \cong R^n \Rightarrow m = n$

Dim (solo per $m = 2$) $f : R^2 \xrightarrow{\cong} R^n$ omeo $\Rightarrow$

$f| : R^2 - \{0\} \xrightarrow{\cong} R^n - \{f(0)\}$ omeo. Ma

$R^2 - \{0\} \simeq S^1$, $R^n - \{f(0)\} \simeq S^{n-1} \Rightarrow S^1 \simeq S^{n-1}$

$\Rightarrow n - 1 = 1$ perché $S^0 = \{1, -1\}$ non è connesso

e $\pi_1(S^{n-1}) \cong 0$ se $n-1 > 1$ mentre $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Cenni sulla dimostrazione $k : U \hookrightarrow X$, $l : V \hookrightarrow X$

inclusioni $\rightsquigarrow$ $k_* : \pi_1(U) \to \pi_1(X)$, $l_* : \pi_1(V) \to \pi_1(X)$

$\Rightarrow \exists!\ \Phi : \pi_1(U) * \pi_1(V) \to \pi_1(X)$ omomorfismo

indotto da k_* e l_* (proprietà universale).

Resta da far vedere che

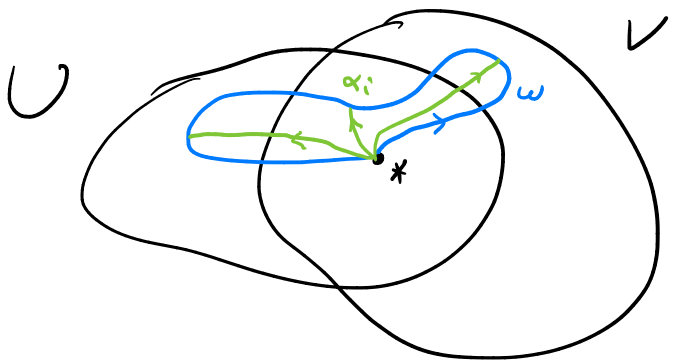
1) Φ suriettiva;

2) $\operatorname{Ker} \Phi = \langle\!\langle \{ i_*(z)\, j_*(z)^{-1} \mid z \in \pi_1(U \cap V) \} \rangle\!\rangle$.

2) non lo dimostriamo (è un po' lungo e tecnico).

1) $[\omega] \in \pi_1(X, *)$, $* \in U \cap V$ $\quad \omega : [0,1] \to X$

$\delta > 0$ numero di Lebesgue per il ricoprimento aperto $\{\omega^{-1}(U), \omega^{-1}(V)\}$ di $[0,1]$ $\rightsquigarrow$ $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ suddivisione di $[0,1]$ t.c. $a_i - a_{i-1} \leq \delta$ $\forall\, i = 1, \dots, n$ $\Rightarrow$ $\omega([a_{i-1}, a_i]) \subset$ in U o in V.



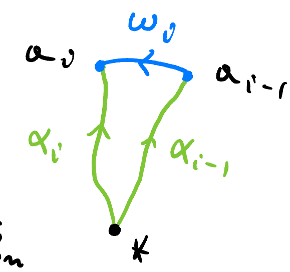
$\alpha_i : [0,1] \to X$ cammino tra $*$ e $\omega(a_i)$

t.c. $\alpha_i([0,1]) \subset \begin{cases} U \cap V \\ U - V \\ V - U \end{cases}$ in base all'aperto che contiene $\omega(a_i) \in \begin{cases} U \cap V \\ U - V \\ V - U \end{cases}$

e $\alpha_0 = \alpha_1 = *$.

$\omega_i : [0,1] \to X$

$\omega_i(t) = \omega\big((1-t)a_{i-1} + t a_i\big)$



$$\omega \simeq_{\{0,1\}} \alpha_0 \cdot \omega_1 \cdot \bar{\alpha}_1 \cdot \alpha_1\, \omega_2\, \bar{\alpha}_2 \cdots \alpha_n \cdot \omega_n \cdot \bar{\alpha}_n$$

$\varphi_i = \alpha_{i-1}\, \omega_i\, \bar{\alpha}_i$ è un cappio in U o in V $\Rightarrow$

$[\omega] = \underbrace{[\varphi_1] \cdots [\varphi_n]}_{\text{in } \pi_1(X)}$ con $[\varphi_i] \in \pi_1(U)$ o $[\varphi_i] \in \pi_1(V)$

$\Rightarrow [\omega] = \Phi\big(\underbrace{[\varphi_1] \cdots [\varphi_n]}_{\text{in } \pi_1(U) * \pi_1(V)}\big)$