Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2021-2022, sessione invernale, primo appello

COGNOME Stampatello **NOME** Leggibile

N. Matricola ______ **Anno di corso** ______

Corso di **S. CUCCAGNA**

ESERCIZIO N. 1. Al variare di $a \in (0, +\infty)$ si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(e - 2ex^{-a} + x^{-2a}\right) - \tanh(\log x)}{\int_1^{e^{x^4}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt}$$

Ho fatto un errore, perché intendevo considerare $\lim_{x\to+\infty} \ldots$

In quel caso $\sin\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{6t^3} + O(t^{-4})$

$\Rightarrow \int_1^{e^{x^4}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = \lg t \Big]_1^{e^{x^4}} + \int_1^{e^{x^4}} \left(-\frac{1}{6t^3} + O(t^{-4})\right) =$

$= x^4 + C + o(1)$, per una qualche costante C

$= x^4(1+o(1))$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg(e - 2ex^{-a} + x^{-2a}) - \operatorname{th}(\lg(x))}{\int_1^{e^{x^4}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\lg(e - 2ex^{-a} + x^{-2a}) - \operatorname{th}(\lg(x))}{x^4} = \frac{1-1}{+\infty} = 0$

Ma anche $\lim_{x\to 0^+}$ è locale. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_1^{e^{x^4}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt}{x^4} \overset{\text{Hopital}}{=}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^4}\, 4\cancel{x^3} \sin\left(\frac{1}{e^{x^4}}\right)}{4\cancel{x^3}} = \sin(1) > 0$, perché $0<1<\frac{\pi}{2}$

Quindi abbiamo $\frac{\lg\left(x^{-2a}(1+o(1))\right) - \operatorname{th}(\lg x)}{x^4 \sin(1)\,(1+o(1))} =$

$= \frac{-2a \lg x + \lg(1+o(1)) - \operatorname{th}\lg(x)}{x^4 \sin(1)\,(1+o(1))} = \frac{-2a \lg x}{x^4 \sin(1)}(1+o(1))$

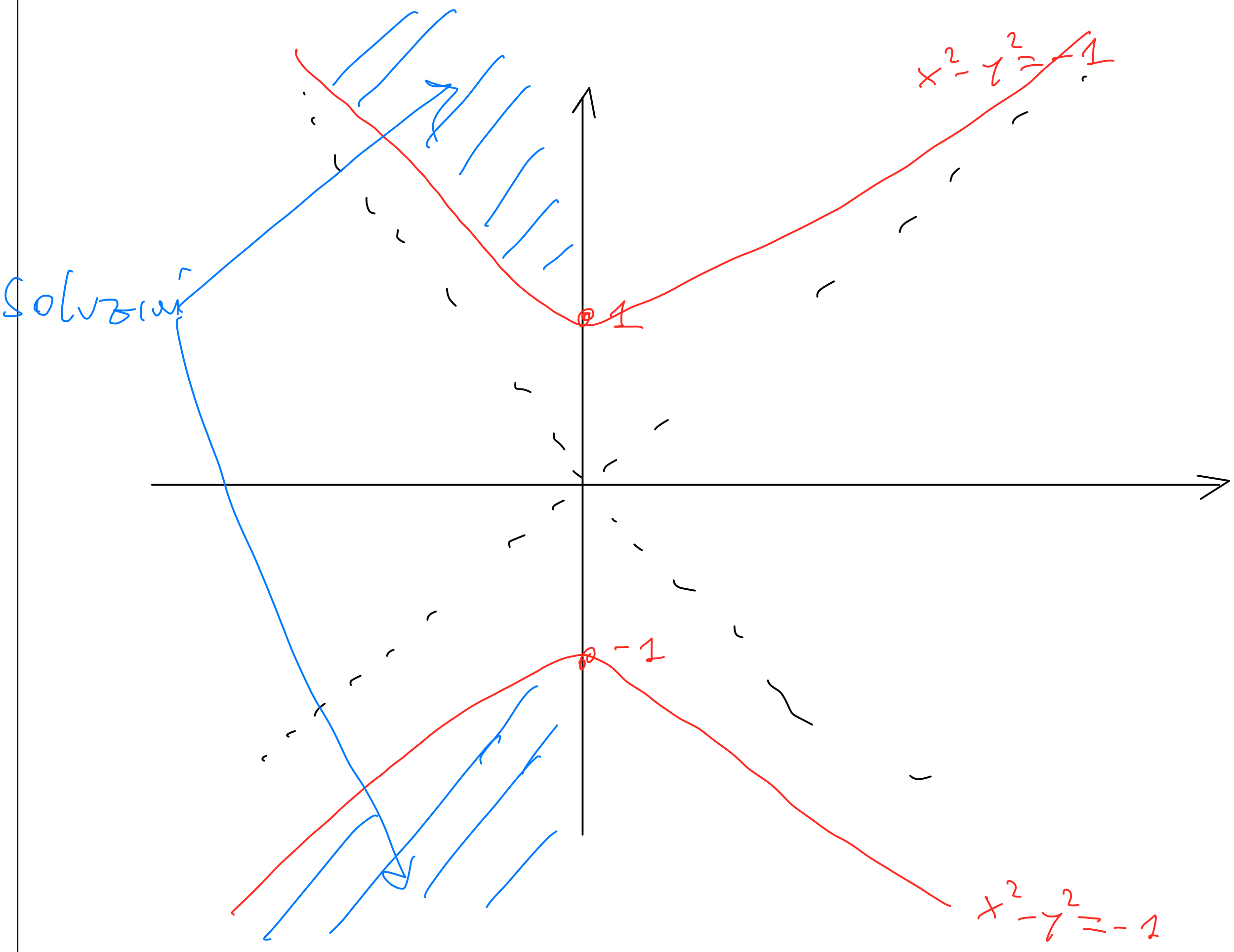
$\xrightarrow{x\to 0^+} +\infty$

ESERCIZIO N. 2. Si determini l'insieme $E = \{z \in \mathbb{C} : Re\left(\frac{1}{1+z^2}\right) < 0\} \cap \{z \in \mathbb{C} : e^{Re(z)} < 1\}$ tracciando inoltre le soluzioni nel piano.

Per $z = x + iy$, $e^x < 1 \iff x < 0$

$$Re\left(\frac{1}{1+z^2}\right) = Re\left(\frac{1+\bar{z}^2}{|1+z^2|^2}\right) = \frac{1}{|1+z^2|^2}(1+x^2-y^2) < 0$$

$$\iff 1 + x^2 - y^2 < 0$$



COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Studiare la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\int_0^x e^{-\frac1t}\frac{1}{1+t}dt & \text{se } x>0,\\ \int_0^x \frac{t}{t^3-1}dt & \text{se } x\le 0\end{cases}$$

$t^3-1=(t-1)(t^2+t+1)$

- si calcolino $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$; per $t\to+\infty$ ho $e^{-\frac1t}\frac{1}{1+t}=\frac1t(1+o(1)) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\frac{t}{t^3-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}$, $A=\frac{t}{t^2+t+1}\Big|_{t=1}=\frac13$, $B=-\frac13$ (moltiplica per t e considera $t\to+\infty$)

$\frac{t}{t^3-1}=\frac{(t^2+t+1)A+Bt(t-1)+C(t-1)}{t^3-1}$, confrontando termini costanti al numeratore, $A-C=0 \Rightarrow C=\frac13$

$f(x)=\frac13\int_0^x\frac{1}{t-1}dt-\frac13\int_0^x\frac{t-1}{t^2+t+1}=\frac13\lg|x-1|-\frac16\int_0^x\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt+\frac12\int_0^x\frac{dt}{(t+\frac12)^2+\frac34}=\frac13\lg\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2}{\sqrt3}\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\frac{2}{\sqrt3}(x+\frac12)}\frac{du}{u^2+1}$

$=\frac13\lg\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2}{\sqrt3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt3}(x+1)\right)-\frac{2}{\sqrt3}\arctan\left(\frac1{\sqrt3}\right)\xrightarrow{x\to-\infty}-\frac{\pi}{\sqrt3}-\frac{2}{\sqrt3}\arctan\left(\frac1{\sqrt3}\right)$ dove $t+\frac12=\frac{\sqrt3}{2}u$, $dt=\frac{\sqrt3}{2}du$

- si calcoli $f'(x)$ e si trovino eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$f'(x)=\begin{cases}e^{-\frac1x}\frac{1}{1+x} & \text{per } x>0\\ \frac{x}{x^3-1} & \text{per } x<0\end{cases}$ $\quad f'_d(0)\overset{Hop}{=}\lim_{x\to0^+}f'(x)=0$, $\quad f'_d(0)\overset{Hop}{=}\lim_{x\to0^-}f'(x)=0$ $\Rightarrow f'(0)=0$, 0 unico punto critico. Per $x>0$ $f''(x)=e^{-\frac1x}\left(\frac1{x^2}\frac1{1+x}-\frac1{(1+x)^2}\right)=\frac{e^{-\frac1x}}{1+x}\left(\frac1{x^2}-\frac1{1+x}\right)=$

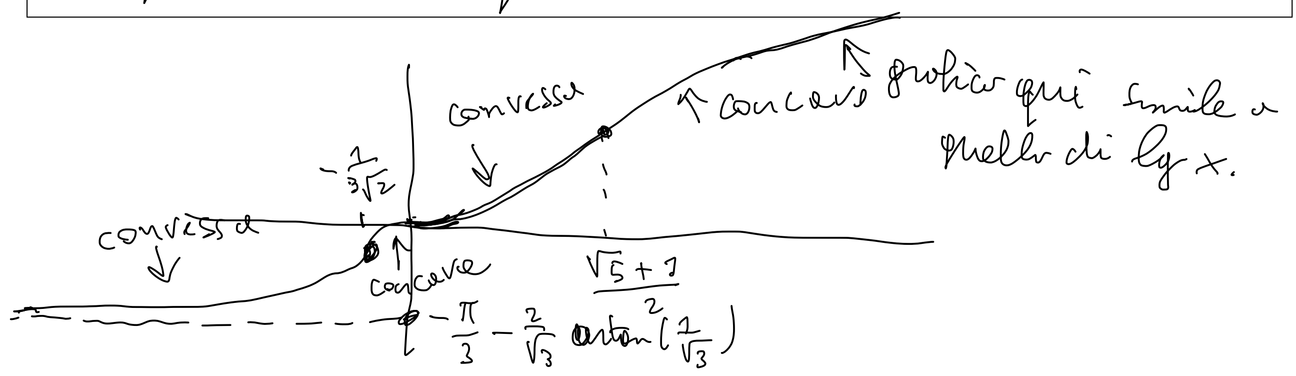
- si stabilisca dove $f(x)$ e' concava e dove e' covessa;

$=\frac{e^{-\frac1x}}{1+x}\frac{1+x-x^2}{x^2(1+x)}$ $\quad x^2-x-1=0 \iff x=x_\pm=\frac12\pm\frac{\sqrt{1+4}}{2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt5+1}{2}$ è un flesso. Per $x<0$ $f''(x)=\frac{x^3-1-3x^3}{(x^3-1)^2}=-\frac{1}{(x^3-1)^2}(2x^3+1)=0\Rightarrow x^3=-\frac12$

$x=-\frac{1}{\sqrt[3]2}$ è un flesso.

Anche 0 è un flesso

- si stabilisca se esistono rette asintotiche e si tracci il grafico . C'è la retta asintotica $y=-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{\sqrt3}\arctan\left(\frac1{\sqrt3}\right)$ per $x\to-\infty$, mentre non c'è retta asintotica per $x\to+\infty$, perché $f(x)=\lg x+C+o(1)$ per ~~una~~ una qualche $C\in\mathbb{R}$ quando $x\to+\infty$



ESERCIZIO N. 4. Sia $f(x) = \int_0^x \log\left(1+t+t^2\right) dt$:

(*i*) calcolare il polinomio di McLaurin $p_4(x)$ di $f(x)$ di ordine 4;

$$\lg(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + E_3(y) \qquad \text{dove } E_3(y) = o(y^3)$$

$$\lg(1+t+t^2) = t+t^2 - \frac{(t+t^2)^2}{2} + \frac{(t+t^2)^3}{3} + E_3(t+t^2) = t+t^2 - \frac{t^2+2t^3}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

$$= t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + o(t^3)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + E(x)$$

dove $o(t^3) = E_3(t+t^2) - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}(3t^4 + 3t^5 + t^6)$ e

$$E(x) = \int_0^x \left(E_3(t+t^2) - \frac{1}{2}t^4 + t^4 + t^5 + \frac{1}{3}t^6\right) dt = o(x^4)$$

Ricordare $$|E_3(y)| = \frac{|\lg^{(4)}(c_y)|}{4!} y^4 = \frac{|((1+y)^{-1})^{(3)}(c_y)|}{4!} y^4 =$$

(*ii*) valutare l'errore $|f(1) - p_4(1)|$.

$$\leq \frac{1}{4} y^4$$

$$|E_3(t+t^2)| \leq \frac{1}{4}(t+t^2)^4 \leq \frac{2^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{4}} t^4$$

$$|E(1)| \leq \int_0^1 \left(4t^4 + \frac{3}{2}t^4 + t^5 + \frac{t^6}{3}\right) dt =$$

$$= \frac{11}{2}\,\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$ questo è una

maggiorazione