$(V, \langle , \rangle)$ spazio vett. Euclideo

$$\underset{\text{base per } V}{(v_1, \dots, v_n)} \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} \underset{\text{base ortonormale}}{(u_1, \dots, u_n)}$$

Quindi ogni spazio vett. Euclideo di dimensione finita ammette basi ortonormali. Più in generale:

Teorema Sia V uno spazio vettoriale Euclideo, $\dim V = n$. Supponiamo che $(u_1, \dots, u_k)$ siano vettori ortonormali, $k < n$. Allora esistono vettori $u_{k+1}, \dots, u_n \in V$ t.c. $(u_1, \dots, u_n)$ sia una base ortonormale per V.

Dim $(u_1, \dots, u_k)$ sono lin. indipendenti perché ortonormali $\Rightarrow \exists\ v_{k+1}, \dots, v_n$ t.c. $(u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ sia base per V. Applicando Gram-Schmidt e normalizzando si ottiene una base ortonormale $(u_1, \dots, u_n)$ che completa i vettori dati.

Es In $\mathbb{R}^4$ consideriamo $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$u_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\|u_1\| = \|u_2\| = 1$, $\langle u_1, u_2 \rangle = 0 \Rightarrow (u_1, u_2)$ ortonormali

(u_1, u_2, e_3, e_4) base per $\mathbb{R}^4$ infatti

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$u_3' = e_3 - \langle u_1, e_3 \rangle u_1 - \langle u_2, e_3 \rangle u_2 =$$
$$= e_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right) \rightsquigarrow u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$u_4' = e_4 - \langle u_1, e_4 \rangle u_1 - \langle u_2, e_4 \rangle u_2 - \langle u_3, e_4 \rangle u_3 =$$
$$= e_4 - \frac{1}{\sqrt{2}} u_2 = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \rightsquigarrow u_4 = \frac{u_4'}{\|u_4'\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(u_1, u_2, u_3, u_4) base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ che completa (u_1, u_2).

In modo simile, dato $U \subset V$ sottospazio vettoriale, se $(u_1, \dots, u_k)$ è base ortonormale per $U \rightsquigarrow (u_1, \dots, u_n)$ completamento ortonormale $\Rightarrow (u_{k+1}, \dots, u_n)$ base ortonormale per $U^\perp$.

Vediamo l'utilità delle basi ortonormali.

Teorema Sia V uno spazio vettoriale Euclideo e sia $(u_1, \dots, u_n)$ una base ortonormale per V. Allora $\forall v \in V$ si ha
$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v \rangle u_i .$$

Dim $\exists\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \Rightarrow$
$$\langle u_j, v \rangle = \langle u_j, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_j, u_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ji}$$
$$= a_j .$$

Pertanto le componenti di un vettore qualunque v rispetto ad una base ortonormale $(u_1, \dots, u_n)$ sono i prodotti scalari $\langle u_i, v \rangle$, $i = 1, \dots, n$.

Teorema Se $(u_1, \dots, u_n)$ è base ortonormale per V, allora posto $v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, $w = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$, si ha: $\langle v, w \rangle_V = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n}$ e $\|v\|_V = \|X\|_{\mathbb{R}^n}$, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Se $V = U \oplus W$ allora $\forall\, v \in V$ $\exists!$ $u \in U$ e $w \in W$ t.c. $v = u + w$ $\rightsquigarrow$ $P_U : V \to U$, $P_W : V \to W$ t.c. $v = P_U(v) + P_W(v)$ $\forall\, v \in V$. P_U e P_W sono dette proiezioni.

P_U e P_W sono lineari, suriettive e $P_U(u) = u$ $\forall\, u \in U$ (e similmente $P_W(w) = w$ $\forall\, w \in W$), $W = \ker P_U$, $U = \ker P_W$.

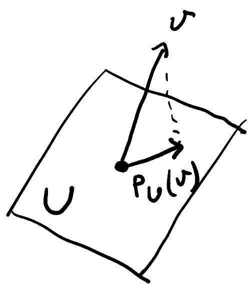
$\boxed{E}$

<u>Def</u> Sia V uno spazio vettoriale Euclideo e sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale. La proiezione $P_U : V \to U$ determinata dalla somma diretta ortogonale $V = U \oplus U^\perp$ è detta <u>proiezione ortogonale</u> su U.

<u>Teorema</u> Sia V uno spazio vettoriale Euclideo e sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale. Consideriamo una base ortonormale $(u_1, \dots, u_k)$ per U. Allora la proiezione ortogonale $P_U : V \to U$ è data dalla formula

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v \rangle u_i \quad \forall\, v \in V.$$

<u>Dim</u> completamento ortonormale della base $\rightsquigarrow$ $(u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale per V $\Rightarrow$



$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v \rangle u_i = v' + v'' \text{ con}$$

$$v' = \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v \rangle u_i \in U, \quad v'' = \sum_{i=k+1}^{n} \langle u_i, v \rangle u_i = v - v' \in U^\perp$$

$\Rightarrow v' = P_U(v)$, $v'' = P_{U^\perp}(v)$.

Matrici ortogonali

Def Una matrice reale $M \in M_n(\mathbb{R})$ è detta matrice ortogonale se ${}^tM\,M = I_n$. L'insieme delle matrici ortogonali $n \times n$ si denota con $O(n)$ e si chiama gruppo ortogonale.

Teorema $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ è un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$. $M \in O(n) \Rightarrow \det M = \pm 1$. $M \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale $\Leftrightarrow$ le righe (o le colonne) di M formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (col prodotto scalare canonico).

Dim $I_n \in O(n) \Rightarrow O(n) \neq \emptyset$.

$M \in O(n) \Leftrightarrow {}^tM\,M = I_n \Leftrightarrow M$ invertibile e $M^{-1} = {}^tM$
$\Rightarrow M \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$\det({}^tM\,M) = 1 \Rightarrow (\det M)^2 = 1 \Rightarrow \det M = \pm 1$$

$$M, N \in O(n) \Rightarrow {}^t(M\,N)\,MN = {}^tN\,{}^tM\,M\,N = {}^tN\,N = I_n$$
$\Rightarrow MN \in O(n)$.

$M \in O(n) \Rightarrow {}^tM\,M = I_n \Rightarrow M^{-1}({}^tM)^{-1} = I_n \Rightarrow$
$M^{-1}\,{}^t(M^{-1}) = I_n \Rightarrow {}^t(M^{-1}) = (M^{-1})^{-1} \Rightarrow M^{-1} \in O(n)$.

Pertanto $O(n)$ è un gruppo rispetto al prodotto $\Rightarrow O(n)$ è sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$.

$M \in O(n) \Leftrightarrow {}^tM\,M = I_n \Leftrightarrow ({}^tM\,M)_{ij} = \delta_{ij} \quad \forall i,j = 1, \dots, n$
$\Leftrightarrow ({}^tM)^{(i)}\,M_{(j)} = \delta_{ij} \quad \forall i,j \Leftrightarrow \langle M_{(i)}, M_{(j)} \rangle = \delta_{ij}$
(in modo simile per le righe, usando $M\,{}^tM = I_n$).

Es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(2)$ e $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ $\boxed{E}$

$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \in O(2)$ e $\det\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\right) = 1$

Def $M \in O(n)$ è detta <u>ortogonale speciale</u> se $\det M = 1$.
Si pone $SO(n) \overset{def}{=} \{M \in O(n) \mid \det M = 1\}$. $SO(n)$ è detto <u>gruppo ortogonale speciale</u>.

Si verifica facilmente che $SO(n)$ è un sottogruppo (normale) di $O(n)$.

$O(1) = \{1, -1\}$, $SO(1) = \{1\}$. Vediamo $O(2)$:

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(n) \iff \left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$ base ortonormale per $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow ab + cd = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

dato che: $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}^{\perp} = \text{span}\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$ in quanto $\dim \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}^{\perp} = 1$ e $\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}^{\perp}$.

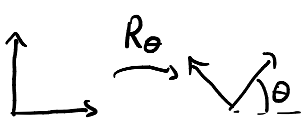
$a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow \exists\ \theta \in [0, 2\pi]$ t.c. $\begin{cases} a = \cos\theta \\ c = \sin\theta \end{cases}$

$\begin{cases} b = t\cos\theta \\ d = t\sin\theta \end{cases}$ $\quad b^2 + d^2 = 1 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow$

$M = R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2)$ oppure

$M = S_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \in O(2) - SO(2)$

R_θ <u>matrice di rotazione</u> di angolo θ



Def Siano V e W due spazi vettoriali Euclidei.
Un'applicazione lineare $f: V \to W$ è detta <u>isometrica</u> se $\langle f(v), f(u) \rangle_W = \langle v, u \rangle_V \quad \forall\, v, u \in V$. Se f è lineare, isometrica e suriettiva, f è detta <u>isometria</u>.

OSS 1) Sia $f: V \to W$ isometrica e $v \in \ker f \Rightarrow f(v) = 0_W \Rightarrow$
$0 = \langle f(v), f(v) \rangle = \langle v, v \rangle \Rightarrow v = 0_V \Rightarrow f$ iniettiva.

2) $f: V \to W$ isometria $\Rightarrow f$ invertibile. Siano $w, z \in W$
$\Rightarrow \exists\, v, u \in V$ t.c. $w = f(v)$, $z = f(u) \Rightarrow$
$$\langle f^{-1}(w), f^{-1}(z) \rangle = \langle v, u \rangle = \langle f(v), f(u) \rangle = \langle w, z \rangle$$
$\forall\, w, z \in W \Rightarrow f^{-1}$ isometria.

Teorema Siano V e W spazi vettoriali Euclidei, $\dim V = n$, e sia $f: V \to W$ lineare. Allora f è un'isometria $\Leftrightarrow$ f manda una base ortonormale di V in una base ortonormale di W.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base ortonormale di V
Poniamo $w_i = f(v_i)$, $i = 1, \dots, n \Rightarrow \mathcal{W} = (w_1, \dots, w_n)$ base di W
$\langle w_i, w_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow \mathcal{W}$ ortonormale.

$\boxed{\Leftarrow}$ f è un isomorfismo. Siano $v, u \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$
$u = \sum_{j=1}^n y_j v_j$, $\quad x_i, y_j \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle v, u \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$w_i = f(v_i)$ e $(w_1, \dots, w_n)$ ortonormale $\Rightarrow$
$$\langle f(v), f(u) \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i w_i, \sum_{j=1}^n y_j w_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle v, w \rangle$$
$\forall\, v, w \in V \Rightarrow f$ isometria.

Teorema Siano V e W spazi vett. Euclidei e siano $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ una base ortonormale per V e $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_n)$ una base ortonormale per W. Un'applicazione lineare $f : V \to W$ è un'isometria $\iff M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f) \in O(n)$.

Dim $A = (a_{ij}) = M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f)$

le colonne $A_{(1)}, \dots, A_{(n)}$ sono le coordinate di $f(v_1), \dots, f(v_n)$ nella base $\mathcal{W}$. $\langle f(v_i), f(v_j) \rangle_W = \langle A_{(i)}, A_{(j)} \rangle_{\mathbb{R}^n}$ $\forall\, i, j = 1, \dots, n$

Pertanto f è ortogonale $\iff$

$\langle f(v_i), f(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ $\forall\, i, j = 1, \dots, n \iff A \in O(n)$.

Corollario Sia V uno spazio vettoriale Euclideo, e siano $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{V}' = (v_1', \dots, v_n')$ due basi per V, con $\mathcal{V}$ ortonormale. Allora $\mathcal{V}'$ è ortonormale $\iff$ $M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'}(id_V) \in O(n)$.

Dim $id_V : V \to V$ è un'isometria. $\boxed{E}$