Teoria elettromagnetica elementare

Michele Pipan[1]

[1]DMG
Università di Trieste

January 6, 2022

Indice

Sommario

- Si parte dalle equazioni di Ampère e Faraday, dalle relazioni costitutive, dagli operatori divergenza e rotore
- Considerando oscillazione armonica si ottengono le due equazioni per la variazione del campo Elettrico e Magnetico nel tempo
- L'interpretazione delle equazioni consente di comprendere in quali condizioni il comportamento sia diffusivo o ondulatorio

Equazioni fondamentali

Legge di Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\delta \mathbf{B}}{\delta \mathbf{t}} \tag{1}$$

Legge di Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\delta \mathbf{D}}{\delta \mathbf{t}} \tag{2}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \ldots \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \ldots \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

Equazioni fondamentali (2)

inoltre

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_o \, ; \, \mu = \mu_r \mu_0$$

dove $\varepsilon, \mu; \varepsilon_r, \mu_r; \varepsilon_0, \mu_0$ sono le permittività dielettriche e permeabilità magnetiche rispettivamente assolute, relative e del vuoto (queste ultime pari a $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$ e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ Tm/A$

Relazioni tra Divergenza, gradiente, rotore

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{3}$$

$$\nabla \times \nabla A = 0 \tag{4}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{5}$$

Definizioni e unità di misura

J = densità di corrente $\left[Am^{-2}\right]$
D = spostamento elettrico $\left[Cm^{-2}\right]$
B = densità flusso magnetico $[T]$
E = intensità campo elettrico Vm^{-1}
H = intensità campo magnetico Am^{-1}

Nota

La Legge di Faraday stabilisce che un campo elettrico esiste in una regione dove un campo magnetico varia nel tempo.
La Legge di Ampère stabilisce che un campo magnetico è generato da uno spostamento di carica elettrica (conduzione+polarizzazione)

Sviluppo

Usando l'identità vettoriale (3) otteniamo per il campo magnetico variabile nel tempo

$$\nabla \bullet \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\delta}{\delta \mathbf{t}} \nabla \bullet \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

quindi

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Sviluppo (2)

Analogamente:

$$\nabla \bullet \mathbf{J} + \frac{\delta}{\delta \mathbf{t}} \nabla \bullet \mathbf{D} = \nabla \bullet \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \tag{7}$$

la divergenza della densità di corrente $\nabla \bullet \mathbf{J}$ è uguale al tasso di accumulo di densità di carica elettrica Q cioè

$$\nabla \bullet \mathbf{J} = -\frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta \mathbf{t}} = -\frac{\delta}{\delta \mathbf{t}} \nabla \bullet \mathbf{D} \tag{8}$$

Sviluppo (3)

Quindi

$$\nabla \bullet \mathbf{D} = \mathbf{Q} \tag{9}$$

in regioni a conduttività finita non si verifica accumulo di carica elettrica durante il flusso di una corrente (non considerando i conduttori elettrolitici), quindi $Q = 0$ e

$$\nabla \bullet \mathbf{D} = \varepsilon_{\mathbf{r}} \varepsilon_{\mathbf{0}} \nabla \bullet \mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{10}$$

Sviluppo (4)

Si possono riscrivere (1) e (2) come segue

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta \mathbf{t}} \tag{11}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta \mathbf{t}} \tag{12}$$

calcolando il rotore di queste equazioni e ricordando che $\nabla \bullet \mathbf{E} = \mathbf{0} = \nabla \bullet \mathbf{H}$ si ha

Sviluppo (5)

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \frac{\delta}{\delta \mathbf{t}} (\nabla \times \mathbf{H}) = \mu \sigma \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t} + \mu \varepsilon \frac{\delta^2 \mathbf{E}}{\delta t^2} \tag{13}$$

$$\nabla^2 H = -\sigma (\nabla \times \mathbf{E}) - \varepsilon \frac{\delta}{\delta t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \mu \sigma \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t} + \mu \varepsilon \frac{\delta^2 \mathbf{H}}{\delta t^2} \tag{14}$$

Sviluppo (6)

Consideriamo un campo EM con oscillazione sinusoidale del tipo

$$E(t) = E_0 e^{i\omega t} \; ; \; H(t) = H_0 e^{i\omega t} \tag{15}$$

Nota: qualsiasi oscillazione più complicata può essere tradotta in una somma di sinusoidi pesate e sfasate (vedi Fourier)

Le derivate sono: $E^{'} = i\omega E_0 e^{i\omega t} = i\omega E(t) \; ; \; E^{''} = -\omega^2 E(t)$

Sviluppo (7)

Da (13) e (14) si ottiene quindi

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mathbf{i}\omega\mu\sigma\mathbf{E} - \omega^{\mathbf{2}}\mu\varepsilon\mathbf{E} \tag{16}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mathbf{i}\omega\mu\sigma\mathbf{H} - \omega^{\mathbf{2}}\mu\varepsilon\mathbf{H} \tag{17}$$

che sono le equazioni per la propagazione dei vettori campo elettrico e magnetico in un mezzo omogeneo e isotropo con conduttività σ, permeabilità magnetica μe permittività dielettrica ε

Sviluppo (8)

Ricordando la forma delle equazioni di diffusione (18) e d'onda (19), i.e.

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{D} \frac{\delta \varphi}{\delta t} \tag{18}$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{v^2} \frac{\delta^2 \varphi}{\delta t^2} \tag{19}$$

possiamo osservare che (13, 14) contengono un termine diffusivo (il primo al secondo membro) ed uno ondulatorio (il secondo)

Sviluppo (9)

Per le frequenze utilizzate in GPR (circa da 25 MHz a 2.5 GHz) e per conduttività $\sigma < 0.01\,S/m$ il campo EM si propaga come un'onda a velocità $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$ ed il termine di diffusione può essere trascurato.
I limiti della banda utile per l'utilizzo del GPR sono legati a: dispersione, penetrazione, scattering

Dispersione: velocità di fase e coefficiente di attenuazione devono essere indipendenti dalla frequenza (plateau radar) per garantire l'invarianza del transiente (ondina radar) e poter quindi misurare ampiezza e tempo di arrivo;

Penetrazione (limite di alta frequenza): la radiazione EM viene assorbita più rapidamente alle alte frequenze e la penetrazioe nel terreno si riduce a profondità che limitano l'applicabilità del metodo;
Scattering (limite di alta frequenza): quando la lunghezza d'onda è confrontabile con la granularità del mezzo i fenomeni di scattering dominano e riducono la penetrazione della radiazione nel mezzo.

Letture I

Telford W.M., Geldart L.P., Sheriff R.E,
Applied Geophysics.
Cambridge University Press, 1990.

Ward S.H., Hohmann G.W.,
Electromagnetic Theory.
Society of Exploration Geophysicists 1987.