

Definiamo

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

e

$$f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

**Esercizio 1.** Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

1.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-2x} & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

con  $a > 0$ ;

4.

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } -b \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con  $a, b > 0$ ;

5.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

**Esercizio 2.** Calcolare la trasformata di Fourier della gaussiana:

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

**Esercizio 3.** Siano  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ ,  $f' \in L^1(\mathbb{R})$  e  $f'' \in L^1(\mathbb{R})$ . Allora, dimostrare che si ha  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ .

**Esercizio 4.** Siano  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Allora, dimostrare che si ha

1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)g(x) dx;$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)} dx \quad (\text{identità di Parseval});$$

3.

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi);$$

4.

$$\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\xi).$$