11/01/2022

La trasformata di Hilbert

Def Sia $f \in C^1([-\pi,\pi])$ definiamo la trasformata di Hilbert come

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-\pi,\pi] \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2)\, f(x-z)\, dz$$

Nota $\cot(y) = \dfrac{\cos(y)}{\sin(y)} = (\tan(y))^{-1}$

Notazione Scriviamo

$$\text{p.v.} \int \bullet \, dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-\pi,\pi] \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)} \bullet \, dz$$

e

$$\text{p.v.} ⨍ \bullet \, dz = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-\pi,\pi] \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)} \bullet \, dz$$

tale operatore integrale viene detto <u>valore principale</u>

Es Dimostrare che se $f \in C^1$ allora $\mathcal{H}f$ è ben definita $\forall x \in [-\pi,\pi]$, ossia $\|\mathcal{H}f\|_{L^\infty} \leq C \|f'\|_{L^\infty}$

Dim $\text{p.v.} ⨍ \cot(z/2)\, f(x-z)\, dz = \mathcal{H}f(x)$ vogliamo dimostrare che questa quantità è limitata.

Notiamo la seguente osservazione

$$\text{p.v.} \int \cot(z/2)\, f(x)\, dz = 0$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-\pi,\pi] \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2)\, dz \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-\pi,\pi] \setminus (-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)}\, dz \quad f(x)$$

è una funzione dispari

l'insieme di integrazione è simmetrico rispetto all'origine

OSS Notiamo come la definizione di valore principale sia fondamentale in questo caso, infatti il limite per $\varepsilon \to 0$ preserva la simmetria dell'insieme di integrazione rispetto all'origine, per il quale possiamo dunque concludere che l'int della cot è nullo

In soldoni:

$$\lim_{\varepsilon_2 \to 0} \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{-\pi}^{\varepsilon_2} + \int_{\varepsilon_1}^{\pi} \cot(z/2)\, dz$$

Non sarebbe definito

$$\mathcal{H}f(x) = \mathcal{H}f(x) - 0$$

$$= \text{p.v.} \int \cot(z/2)\, f(x-z)\, dz - \text{p.v.} \int \cot(z/2)\, f(x)\, dz$$

$$= \text{p.v.} \int \cot(z/2) \left[f(x-z) - f(x) \right] dz$$

$$|\mathcal{H}f(x)| = \left| \text{p.v.} \int \cot(z/2) \left[f(x-z) - f(x) \right] dz \right|$$

$$\leq \text{p.v.} \int |\cot(z/2)|\, |f(x-z) - f(x)|\, dz$$

$$\leq \text{p.v.} \int \frac{|\cos(z/2)|}{|\sin(z/2)|}\, |f(x-z) - f(x)|\, dz$$

$$\leq \text{p.v.} \int \underbrace{\left| \frac{z/2}{\sin(z/2)} \right|}_{\leq C'} \frac{\overbrace{|f(x-z) - f(x)|}^{\leq |f'(\xi)|\,|z|}}{|z/2|}\, dz$$

$$\leq C' \; p.v. \int \|f'\|_{L^\infty} \frac{|t|}{|t/2|} \, dt \leq 4\pi C' \|f'\|_{L^\infty}$$ #

Abbiamo dunque provato che $\forall f \in C^1 \; \exists \; K > 0$ t.c. $\|\mathcal{H} f\|_{L^\infty} \leq K \|f'\|_{L^\infty}$

Notazione $\forall f \in L^2$ indichiamo con $\hat{f}(n) = c_n(f)$.

Es Dimostrare che $\forall f \in L^2$ si ha che

$$\widehat{\mathcal{H}f}(n) = -i \, \mathrm{sgn}(n) \, \hat{f}(n),$$

ossia

$$c_n(\mathcal{H}f) = -i \, \mathrm{sgn}(n) \, c_n(f)$$

Dim Se $f \in L^2$ sappiamo che essa può venire espressa come serie di Fourier. Dunque $\forall x \in [-\pi, \pi]$ abbiamo che

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

Calcoliamo adesso

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}f(x) &= p.v. \int \cot(t/2) \, f(x-t) \, dt \\
&= p.v. \int \cot(t/2) \left[\sum_n \hat{f}(n) e^{in(x-t)} \right] dt \\
(*) \quad &= \sum_n \hat{f}(n) e^{inx} \underbrace{\left(p.v. \int \cot(t/2) \, e^{-int} \, dt \right)}_{I_n}
\end{aligned}$$

Se calcoliamo il valore esplicito di questo integrale concludiamo

$$I_n = p.v. \int \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} \left(\cos(nz) - i \sin(nz)\right) dz$$

$$= p.v. \int \cancelto{0}{\frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} \cos(nz)\, dz} - i\, p.v. \int \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} \sin(nz)\, dz$$

$$= -i\, p.v. \int \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} \sin(nz)\, dz$$

Siccome inoltre $\left|\frac{\sin(nz)}{\sin(z/2)}\right| \leq C$ quindi non ho più bisogno del valore principale, ossia

$$I_n = -i \int \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} \sin(nz)\, dz$$

Ci ricordiamo che $n \in \mathbb{Z}$, utilizziamo dunque la relazione

$$\sin(nz) = \operatorname{sgn}(n) \sin(|n| z)$$

$$I_n = -i \operatorname{sgn}(n) \int \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} \sin(|n|z)\, dz$$

Utilizziamo le formule di Eulero

$$I_n = -i \operatorname{sgn}(n) \int \frac{e^{iz/2} + e^{-iz/2}}{2} \; \frac{\dfrac{e^{i|n|z} - e^{-i|n|z}}{\cancel{2i}}}{\dfrac{e^{iz/2} - e^{-iz/2}}{\cancel{2i}}} \, dz$$

$$= -i \operatorname{sgn}(n) \int \frac{e^{iz/2} + e^{-iz/2}}{2} \; \frac{e^{i|n|z}}{e^{iz/2}} \; \frac{1 - e^{-i2|n|z}}{1 - e^{-iz}} \, dz$$

$$= -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(n) \int \left(1 + e^{-iz}\right) e^{i|n|z} \sum_{k=0}^{2|n|+1} e^{-ikz} \, dz$$

$$= -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(n) \sum_{k=0}^{2|n|+1} \int \left[e^{iz(|n|-k)} + e^{iz(|n|-k-1)} \right] dz$$

Notiamo che stiamo integrando esponenziali con arg un numero puramente immaginario, dunque

$$\sum_{k=0}^{2|n|+1} f \; e^{it(|n|-k)} + e^{it(|n|-k-1)} \, dt = 2 ,$$

sostituisco tale risultato ed ottengo che

$$I_n = -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(n) \cdot 2 = -i \operatorname{sgn}(n) .$$

Sostituisco il valore esplicito così incontrato per I_n nell'eq (*) ottenendo che

$$\mathcal{H}f(x) = \sum_n \hat{f}(n) e^{inx} I_n$$

$$= -i \sum_n \operatorname{sgn}(n) \hat{f}(n) \, e^{inx} ,$$

e quindi concludiamo che

$$\widehat{\mathcal{H}f}(n) = -i \operatorname{sgn}(n) \hat{f}(n) \qquad \text{c.v.d.} \qquad \#$$

Es Dimostrare che $\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

Dim Ci ricordiamo che $\forall \phi \in L^2$ vale la relazione

$$(*) \quad \frac{1}{2\pi} \|\phi\|_{L^2}^2 = \sum_n |\hat{\phi}(n)|^2$$

$$c_n(\mathcal{H}f) = -i \operatorname{sgn}(n) \, c_n(f)$$

Per quanto visto prima sappiamo che

$$\mathcal{H}f(x) = \sum_n c_n(\mathcal{H}f) \, e^{inx} = -i \sum_n \operatorname{sgn}(n) \, c_n(f) \, e^{inx} ,$$

utilizziamo dunque la relazione (*) per calcolare la norma L^2 di $\mathcal{H}f$, questo ci dà che

$$\frac{1}{2\pi}\|\mathcal{H}f\|_{L^2}^2 \overset{(*)\ \text{per } \mathcal{H}f}{=} \sum_n |c_n(\mathcal{H}f)|^2$$

$$= \sum_n |-i\,\mathrm{sgn}(n)\, c_n(f)|^2$$

$$\overset{(*)\ \text{per } f}{=} \sum_n |c_n(f)|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^2}^2$$

Confrontando i 2 lati dell'uguaglianza di cui sopra otteniamo quindi che

$$\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{H}f\|_{L^2}$$

Es Dimostrare che $\forall f \in L^2$ vale la relazione

$$\mathcal{H}^2 f = -f$$

$[\ \mathcal{H}^2 f = \mathcal{H}(\mathcal{H}f)\ ]$

Dim So che $\mathcal{H}g(x) = \sum_n (-i)\,\mathrm{sgn}(n)\,\hat{g}(n)\, e^{inx}$,

quindi

$$\mathcal{H}^2 f(x) = \mathcal{H}(\mathcal{H}f)(x) = \sum_n (-i)\,\mathrm{sgn}(n)\, \widehat{\mathcal{H}f}(n)\, e^{inx}$$

$$= \sum_n (-i\,\mathrm{sgn}(n))^2\, \hat{f}(n)\, e^{inx}$$

$$= - \sum_n \hat{f}(n)\, e^{inx} = -f(x)$$