12/01/2022

Recap

La trasformata di Hilbert è data dalla seguente espressione

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2)\, f(x-z)\, dz$$

ed è ben definita $\forall f \in L^2((-\pi,\pi))$

Abbiamo visto inoltre la seguente relazione tra i coefficienti di Fourier di f e quelli di $\mathcal{H}f$.

$$\underset{\substack{\parallel \\ c_n(\mathcal{H}f)}}{\widehat{\mathcal{H}f}(n)} = \underset{\substack{\parallel \\ -i\,\mathrm{sgn}(n)\, c_n(f)}}{-i\,\mathrm{sgn}(n)\, \hat{f}(n)}$$

Proprietà

1) $\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$
2) $\mathcal{H}^2 f = \mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f$

Es Dare un controesempio di una funzione $f \in L^\infty(-\pi,\pi)$ t.c. $\mathcal{H}f \notin L^\infty(-\pi,\pi)$

OSS Come interpretare il risultato di cui sopra.
Ieri abbiamo visto che

$$\mathcal{H} : f \in C^1 \longmapsto \mathcal{H}f \in L^\infty$$
$$: f \in L^2 \longmapsto \mathcal{H}f \in L^2$$

La trasformata di Hilbert è un operatore continuo tra C^1 e L^∞ e tra L^2 e sè stesso.

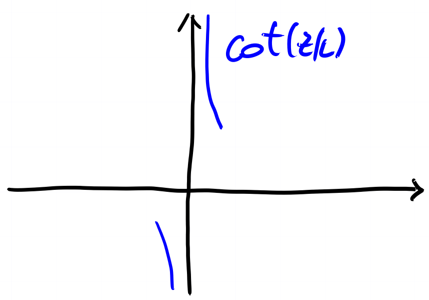
Q: Esiste un caso in cui la trasformata di H. non è un op continuo? La risposta a tale domanda è affermativa e proponiamo il controesempio nell'esercizio.

Dim Cerchiamo una funzione $f \in L^\infty$ tc $\mathcal{H}f \notin L^\infty$
Ricordiamo che $\mathcal{H}f = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}_\varepsilon f$ dove

$$\mathcal{H}_\varepsilon f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2)\, f(x-z)\, dz$$

$$\cot(z/2) = \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)}$$

Guardiamo più da vicino la funzione che funge da nucleo integrale ossia $z \longmapsto \cot(z/2)$



$$\cot(z/2) = \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} = \frac{1 + O(z^2)}{\frac{z}{2} + O(z^3)}$$

$$= \frac{2}{z} + O(z^2)$$

$\rightsquigarrow$ Quando $z \sim 0$ $\cot(z/2) \sim 2/z$

In particolare questo calcolo approssimativo deduciamo che $z \mapsto \cot(z/2)$ <u>non è</u> assolutamente integrabile in un intorno di zero

Consideriamo dunque la funzione

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

quindi

$$f(x-z) = \operatorname{sgn}(x-z) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > z \\ 0 & \text{se } x = z \\ -1 & \text{se } x < z \end{cases}$$

Calcoliamo

$$\mathcal{H}_\varepsilon f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2)\, \operatorname{sgn}(x-z)\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,x)\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2)\, dz$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{(x,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \cot(z/2)\, dz$$

Passo al limite per $\varepsilon \to 0$ e ne deduco che, se $x \neq 0$

$$\mathcal{H} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{x} \cot(z/2)\, dz - \frac{1}{2\pi} \int_{x}^{\pi} \cot(z/2)\, dz$$

$$\cot(z/2) = \frac{\cos(z/2)}{\sin(z/2)} = 2\, \partial_z \left(\log|\sin(z/2)| \right)$$

Quindi

$$\mathcal{H} f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{x} \partial_z (\log|\sin(z/2)|)\, dz - \frac{1}{\pi} \int_{x}^{\pi} \partial_z (\log|\sin(z/2)|)\, dz$$

$$= 1/\pi \, \log|\sin(x/2)| - \frac{1}{\pi} \cancelto{0}{\log|\sin(-\pi/2)|}$$

$$- \frac{1}{\pi} \cancelto{0}{\log|\sin(\pi/2)|} + \frac{1}{\pi} \log|\sin(x/2)|$$

$$= \frac{2}{\pi} \log|\sin(x/2)|$$

Notiamo che la funzione $x \mapsto \frac{2}{\pi}\log|\sin(x/2)|$ non è limitata in $x=0$, infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\pi}\log|\sin(x/2)| = -\infty,$$

dunque $\mathcal{H}f = \mathcal{H}(\mathrm{sgn})$ non è una funzione L^∞.

"Wavelets" e sistemi ortonormali completi in $L^2(0,1)$

Def sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(0,1)$, la famiglia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice completa in L^2 se $\forall g \in L^2$, $\forall \varepsilon>0$ $\exists N>0$ e una famiglia λ_j, $j=0,\dots,N$ t.c.

$$\| g - \sum_{j=0}^{N} \lambda_j f_j \|_{L^2} < \varepsilon$$

Es le armoniche elementari

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, \sin(2\pi n x), \cos(2\pi n x)\right)_{n\geq 1}$$

e

$$\left(e^{i2\pi n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

Sono sistemi ortonormali e completi di $L^2(0,1)$ come visto nella teoria sviluppata nei mesi scorsi

Tali famiglie (ortonormali e complete) sono importanti in quanto ci permettono di "approssimare" una funzione L^2 in maniera arbitraria attraverso una somma finita di funzioni elementari.
Ci sono tuttavia delle limitazioni, essendo le armoniche elementari funzioni continue non approssimano bene funzioni discrete.

Def Sia
$$\psi(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [0, 1/2) \\ 0 & \text{se } x = 1/2 \\ 1 & \text{se } x = (1/2, 1] \end{cases}$$

e ψ funzione madre

$\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ definiamo la funzione
$$\psi_{n,k}(x) = 2^{n/2} \psi(2^n x - k)$$

L'insieme $(1, \psi_{n,k})_{n \in \mathbb{N},\, k \in \{0, \dots, 2^n-1\}}$ è detto Base di Haar

Es Provare che gli elementi della base di Haar sono ortonormali rispetto al prodotto scalare in L^2

Teorema La base di Haar è un sistema ortonormale e completo in $L^2(0,1)$ ossia $\forall f \in L^2$ se definiamo
$$f_0^H = \int_0^1 f(x)\, dx \quad , \quad f_{n,k}^H = \int_0^1 f(x) \psi_{n,k}(x)\, dx$$

allora

$$f_0^H + \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{2^n-1} f_{n,k}^H \, \psi_{n,k} \xrightarrow{N \to \infty} f$$

in $L^2(0,1)$.