# Ex 1,2,3

mercoledì 12 gennaio 2022 14:07

## FOGLIO 9

① $GL(n,K) = \left\{ \begin{matrix} \text{MATRICI} \\ \text{INVERTIBILI} \\ \text{IN } K \end{matrix} \right\}$.

$K = \mathbb{Z}_p$ FINITO $\Rightarrow GL(n, \mathbb{Z}_p)$ FINITO.

$\leadsto$ QUANTI ELEMENTI HA?

$$A = \left[ \underset{\in \mathbb{Z}_p^n}{v_1} \Big| \dots \Big| \underset{\in \mathbb{Z}_p^n}{v_n} \right] \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$$

SE E SOLO SE LE SUE COLONNE

$v_1, \dots, v_n$ SONO L.I. .

IDEA: FISSIAMO $v_1, \dots, v_{k-1}$ L.I.

$\leadsto$ QUANTE SCELTE ABBIAMO PER $v_k$

IN MODO CHE $v_1, \dots, v_{k-1}, v_k$ SIANO L.I. ?

- $v_k = (x_1, \dots, x_n)$, $\forall i$ $x_i \in \mathbb{Z}_p$

$\rightarrow p^n$ SCELTE TOTALI. TOGLIAMO

QUELLE PER CUI $v_k$ È L.D. DA $v_1, \dots, v_{k-1}$.

$v_k$ L.D. DA $v_1, \dots, v_{k-1}$ SE E SOLO SE

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{Z}_p$ t.c.

$$v_k = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}.$$

- VISTO CHE $v_1, \dots, v_{k-1}$ SONO L.I.,
- C'È UNA BIEZIONE $\left\{ \begin{matrix} v_k \\ \text{L.D.} \end{matrix} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{matrix} (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \\ \text{CON } \lambda_i \in \mathbb{Z}_p \ \forall i \end{matrix} \right\}$

P SCELTE $\forall \lambda_i \rightarrow p^{k-1}$ SCELTE PER $v_k$

CHE LO RENDONO L.D. DA $v_1, \dots, v_{k-1}$.

$$\leadsto \begin{matrix} \text{SCELTE PER } v_k \\ \text{ACCETTABILI} \end{matrix} = \left[ \begin{matrix} \text{SCELTE} \\ \text{TOTALI} \end{matrix} \right] - \left[ \begin{matrix} \text{SCELTE} \\ \text{L.D.} \end{matrix} \right] = p^n - p^{k-1}.$$

- IL DISCORSO VALE $\forall k = 2, \dots, n$.
- $\{v_1\}$ È L.I. $\iff v_1 \neq 0 \leadsto p^n - 1 = p^n - p^0$ SCELTE POSSIBILI

$$\Rightarrow \begin{matrix} \text{SCELTE} \\ \text{ACCETTABILI} \\ \text{PER} \\ A = [v_1 | \dots | v_n] \end{matrix} = \prod_{k=1}^{n} \left( \begin{matrix} \text{SCELTE} \\ \text{ACCETTABILI} \\ \text{PER } v_k \end{matrix} \right) = \prod_{k=1}^{n} (p^n - p^{k-1})$$

② $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

A E B SONO SIMILI?

- RISPOSTA PRATICA:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{INVERSA DI SE STESSA}} B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

- RISPOSTA TEORICA:

A E B SONO DIAGONALIZZABILI,

HANNO GLI STESSI AUTOVALORI

CON LE STESSE MOLTEPLICITÀ

$\Rightarrow$ SONO SIMILI A UNA STESSA

MATRICE DIAGONALE

$\Rightarrow$ SONO SIMILI TRA LORO ✓✓.

③ MATRICE DI VANDERMONDE

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 \ \dots & x_n^2 \\ | & | & | \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \det(V(x_1, \dots, x_n))$?

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 \ \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 \ \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} \ \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \underset{R_i \to R_i - x_1 R_{i-1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_n - x_1 \\ | & x_2^2 - x_2 x_1 \ \dots & x_n^2 - x_n x_1 \\ & | & | \\ 0 & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_1 \ \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_1 \end{vmatrix} \underset{\text{SVOLGO PRIMA COLONNA}}{=}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ | & & | \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} + 0 \cdot \left( \begin{matrix} \text{TUTTI GLI} \\ \text{ALTRI} \\ \text{MINORI} \end{matrix} \right) \underset{\text{RACCOLGO COLONNA PER COLONNA}}{=}$$

$$= (x_2 - x_1) \cdot \dots \cdot (x_n - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ x_2 & & x_n \\ | & \dots & | \\ x_2^{n-2} & & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{j>1} (x_j - x_1) \cdot \det(V(x_2, \dots, x_n)).$$

AGISCO ALLO STESSO MODO SU $V(x_2, \dots, x_n)$

$$\rightarrow \det(V(x_2, \dots, x_n)) = \prod_{j>2} (x_j - x_2) \cdot \det(V(x_3, \dots, x_n))$$

$\leadsto$ IN UN NUMERO FINITO DI PASSI OTTENGO

$$\det(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{j>1} (x_j - x_1) \cdot \prod_{j>2} (x_j - x_2) \cdot$$

$$\cdot \prod_{j>3} (x_j - x_3) \cdot \dots \cdot \prod_{j>n-2} (x_j - x_{n-2}) \cdot \det(V(x_{n-1}, x_n)).$$

$$V(x_{n-1}, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_{n-1} & x_n \end{bmatrix} \rightarrow \det(V(x_{n-1}, x_n)) = x_n - x_{n-1}$$

$$\Rightarrow \det(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{j>i} (x_j - x_i) \quad \checkmark\checkmark$$