Teorema Siano V e W spazi vett. Euclidei e siano $\mathcal{V}=(v_1,\dots,v_n)$ una base ortonormale per V e $\mathcal{W}=(w_1,\dots,w_n)$ una base ortonormale per W. Un'applicazione lineare $f: V \to W$ è un'isometria $\Leftrightarrow M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f) \in O(n)$.

Dim $A=(a_{ij})=M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f)$

le colonne $A_{(1)},\dots,A_{(n)}$ sono le coordinate di $f(v_1),\dots,f(v_n)$ nella base $\mathcal{W}$. $\langle f(v_i), f(v_j)\rangle_W = \langle A_{(i)}, A_{(j)}\rangle_{\mathbb{R}^n}$ $\forall i,j=1,\dots,n$

Pertanto f è isometria $\Leftrightarrow$

$$\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \delta_{ij} \quad \forall i,j=1,\dots,n \Leftrightarrow A \in O(n).$$

Teorema Sia V uno spazio vettoriale Euclideo, e siano $\mathcal{V}=(v_1,\dots,v_n)$ e $\mathcal{V}'=(v_1',\dots,v_n')$ due basi per V, con $\mathcal{V}$ ortonormale. Allora $\mathcal{V}'$ è ortonormale $\Leftrightarrow$ $M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'}(id_V) \in O(n)$.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $id_V : V \to V$ è un'isometria.

$\boxed{\Leftarrow}$ $S := M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'}(id_V) \in O(n) \Rightarrow S_{(i)} \in \mathbb{R}^n$ coordinate di v_i' nella base $\mathcal{V}$

$$\langle v_i', v_j'\rangle_V = \langle S_{(i)}, S_{(j)}\rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij} \quad \forall i,j=1,\dots,n$$

$U \subset V$ sottospazio vettoriale, $\dim V < \infty \Rightarrow$

$V = U \oplus U^{\perp} \rightsquigarrow p_U : V \longrightarrow U$ t.c.

$p_U(u + u') = u \quad \forall\, u \in U,\ \forall\, u' \in U^{\perp}.$

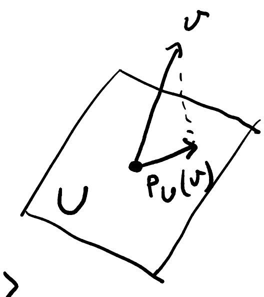
Si ha quindi $v - p_U(v) \in U^{\perp}\ \forall\, v \in V$ e $p_U(u) = u\ \forall\, u \in U$. Inoltre p_U è lineare e $\ker p_U = U^{\perp}$.

Def Sia V uno spazio vettoriale Euclideo e sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale. L'applicazione $p_U : V \to U$ è detta proiezione ortogonale su U.

Teorema Sia V uno spazio vettoriale Euclideo e sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale. Consideriamo una base ortonormale $(u_1, \dots, u_k)$ per U. Allora la proiezione ortogonale $p_U : V \longrightarrow U$ è data dalla formula

$$p_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v \rangle u_i \quad \forall\, v \in V.$$

Dim Poniamo $u := \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v \rangle u_i \in U$



Basta far vedere che $v - u \in U^{\perp}$.

$$\langle u_j, v - u \rangle = \langle u_j, v \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v \rangle \langle u_j, u_i \rangle$$
$$= \langle u_j, v \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v \rangle \delta_{ji} = \langle u_j, v \rangle - \langle u_j, v \rangle = 0.$$

Spazi vettoriali complessi Hermitiani

Def Sia V uno spazio vettoriale complesso. Una funzione $h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ è detta <u>forma sesquilineare</u> se h è antilineare nel primo argomento e lineare nel secondo:

i) $h(v_1 + v_2, w) = h(v_1, w) + h(v_2, w)$,

ii) $h(v, w_1 + w_2) = h(v, w_1) + h(v, w_2)$

iii) $h(\alpha v, w) = \bar{\alpha}(v, w)$; $h(v, \alpha w) = \alpha h(v, w)$

$\forall v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.

OSS $h(0_V, v) = h(v, 0_V) = 0 \quad \forall v \in V$.

Def Una forma sesquilineare $h : V \times V \to \mathbb{C}$ su uno spazio vettoriale complesso è detta <u>forma Hermitiana</u> se $h(v, w) = \overline{h(w, v)} \quad \forall v, w \in V$.

OSS $h : V \times V \to \mathbb{C}$ Hermitiana $\Rightarrow h(v, v) \in \mathbb{R} \;\; \forall v \in V$
Infatti $h(v, v) = \overline{h(v, v)}$.

Def Una forma Hermitiana $h : V \times V \to \mathbb{C}$ è <u>definita positiva</u> se $h(v, v) > 0 \quad \forall v \in V - \{0_V\}$.
Un <u>prodotto Hermitiano</u> è una forma Hermitiana definita positiva. Spesso si indica con $h(v, w) = \langle v, w \rangle$.

Def Uno <u>spazio vettoriale Hermitiano</u> è uno spazio vettoriale complesso V munito di un prodotto Hermitiano (definito positivo)

Es Su $\mathbb{C}^n$ definiamo il <u>prodotto Hermitiano canonico</u>

$$\langle X, Y\rangle \overset{def}{=} {}^t\bar{X}\cdot Y = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j\, y_j, \quad X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Si vede subito che $\langle , \rangle$ è una forma Hermitiana e inoltre

$$\langle X, X\rangle = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 > 0 \quad \forall\, X \in \mathbb{C}^n - \{0\} \Rightarrow \langle , \rangle \text{ def. positiva}$$

Def Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è detta <u>matrice Hermitiana</u> (o <u>autoaggiunta</u>) se $A = {}^t\bar{A}$.

NB Se $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $\bar{A}$ denota la <u>matrice coniugata</u> di A, cioè $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$.

OSS $A \in M_n(\mathbb{R})$ è Hermitiana $\Leftrightarrow$ A è simmetrica. Quindi le matrici Hermitiane sono la controparte complesse delle matrici simmetriche reali.

Sia ora $h: V\times V \to \mathbb{C}$ sesquilineare e $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ base per V $\rightsquigarrow$ $h_{ij} := h(v_i, v_j) \rightsquigarrow M_{\mathcal{V}}(h) := (h_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ <u>matrice di h rispetto alla base $\mathcal{V}$</u>.

Teorema Sia $h: V\times V \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineare, e sia $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ una base per V. Allora $h(v, w) = {}^t\bar{X}\, H\, Y$ dove $H = M_{\mathcal{V}}(h)$, $v = (X)^{\mathcal{V}}$, $w = (Y)^{\mathcal{V}}$.
Inoltre h è Hermitiana $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{V}}(h)$ è una matrice Hermitiana.

La dimostrazione si fa come nel caso reale. $\boxed{E}$

Negli spazi vettoriali Hermitiani valgono definizioni e teoremi analoghi a quelli visti nel caso degli spazi vettoriali Euclidei. In particolare si definiscono i vettori ortogonali: $v \perp w \iff \langle v, w \rangle = 0$, i sottospazi vett. ortogonali, $U^{\perp}$, la norma $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Sia V uno spazio vettoriale Hermitiano. Allora

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \, \|w\| \quad \forall \, v, w \in V.$$

Vale l'uguaglianza $\iff$ v e w sono proporzionali.

OSS A 1° membro figura il modulo del numero complesso $\langle v, w \rangle$ ($|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$, $x, y \in \mathbb{R}$).

La dimostrazione è simile al caso reale, l'unica differenza è che si pone $\alpha = -\frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\langle w, w \rangle} \in \mathbb{C}$ (vedi dim. nel caso reale, lezione 32).

Anche per gli spazi vett. Hermitiani si definiscono le basi ortogonali e ortonormali ($\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$) e si ha l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt esattamente come nel caso reale (ma attenzione che $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$).

Studiare questi concetti riprendendoli dal caso reale

Teorema Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice Hermitiana. Allora gli autovalori di A sono tutti reali. In particolare questo è vero se A è simmetrica reale.

Dim $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di A, $X \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ autovettore relativo a λ: $AX = \lambda X$

$$ {}^t\bar{X} A X = \lambda\, {}^t\bar{X} X $$

${}^t\bar{X} X = \|X\|^2 > 0$ è reale positivo

$$ \overline{{}^t\bar{X} A X} = {}^tX \bar{A} \bar{X} = {}^t({}^tX \bar{A} \bar{X}) = {}^t\bar{X}\, {}^t\bar{A} X = {}^t\bar{X} A X \Rightarrow $$

(è uno scalare)

${}^t\bar{X} A X \in \mathbb{R}$ e quindi $\lambda = \dfrac{{}^t\bar{X} A X}{\|X\|^2} \in \mathbb{R}$.

Def Sia V uno spazio vettoriale Euclideo o Hermitiano e sia $f: V \to V$ un endomorfismo. Diciamo che f è autoaggiunto se $\langle v, f(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle \quad \forall v, w \in V$.

NB Nel caso Euclideo (reale) gli endomorfismi autoaggiunti sono detti anche endomorfismi simmetrici.