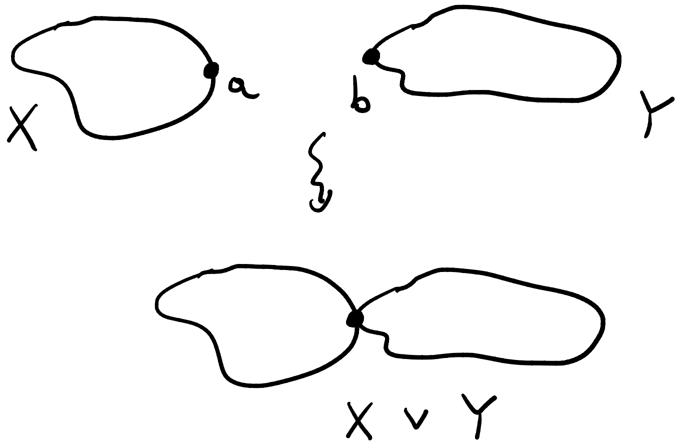
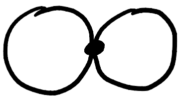
Def Siano X e Y spazi, $a \in X$, $b \in Y$ punti base. L'unione puntata di (X, a) e (Y, b) è lo spazio

$$X \vee Y \overset{def}{=} (X \sqcup Y)/a \sim b$$

ottenuto dall'unione topologica $X \sqcup Y$ identificando a e b.

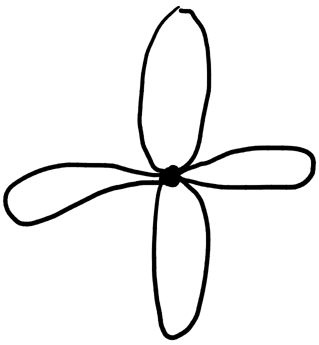


Es $S^1 \vee S^1$



$\bigvee_n S^1 = \underbrace{S^1 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{n \text{ volte}}$

bouquet di n circonferenze



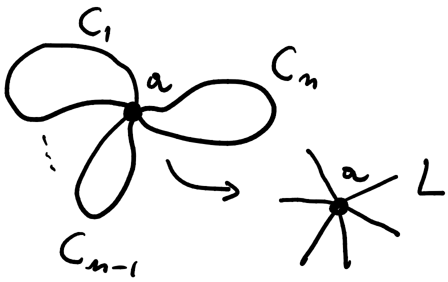
Teorema $\pi_1(\bigvee_n S^1) \cong \langle x_1, \dots, x_n \rangle = F_n$.

Dim $\bigvee_n S^1$ è connesso p.a. Induzione su n.

$n = 1$ $\quad \bigvee_1 S^1 = S^1$ e $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \cong \langle x \rangle$.

Supponiamo che sia vero per $n-1$ e dimostriamolo per $n \geq 2$.

Il punto base $a \in \bigvee_n S^1$ ha un intorno L contraibile unione di archi



Siano $C_1, \dots, C_n$, $C_i \cong S^1$, le circonferenze dell'unione puntata: $\vee_n S^1 = C_1 \cup \dots \cup C_n$

$U = C_1 \cup \dots \cup C_{n-1} \cup L \simeq C_1 \cup \dots \cup C_{n-1} = \vee_{n-1} S^1$

$V = C_n \cup L \simeq C_n \cong S^1$

$U \cap V = L \simeq *$

Per l'ipotesi induttiva $\pi_1(U) \cong \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$

$\pi_1(V) \cong \langle x_n \rangle$

Per il teorema di Seifert-Van Kampen

$$\pi_1(\vee_n S^1) \cong \pi_1(\vee_{n-1} S^1) * \pi_1(S^1) \cong \langle x_1, \dots, x_n \rangle .$$

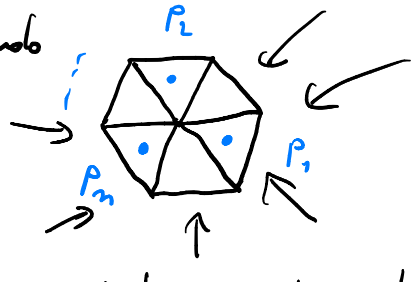
Corollario Siano $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$ punti distinti. Allora

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{p_1, \dots, p_n\}) \cong F_n .$$

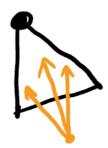
Dim $X = \mathbb{R}^2 - \{p_1, \dots, p_n\}$ è connesso per archi.

Sia $P \subset \mathbb{R}^2$ un poligono regolare con $2n$ lati.

Dividiamo P in triangoli ottenuti unendo il centro di P con i vertici



A meno di omeomorfismi di $\mathbb{R}^2$ possiamo assumere che $p_1, \dots, p_n$ siano i baricentri dei triangoli, alternandoli come in figura.

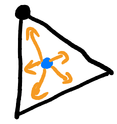


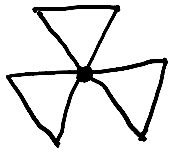
$X \simeq P - \{p_1, \dots, p_n\}$

I triangoli che non contengono i punti $p_1, \dots, p_n$ si deformano sui lati che contengono il centro di P (in modo radiale da un punto esterno)

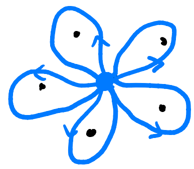
I triangoli che contengono un punto p_i si deformano verso il suo bordo, in modo radiale da p_i.

$X \simeq \vee_n S^1 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{p_1, \dots, p_n\}) \cong F_n$.



 $\cong \vee_n S^1$.

I generatori sono rappresentati da n cappi che "girano" una volta sola attorno ai punti.

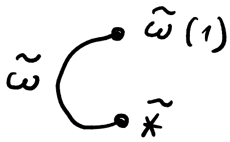


Teorema Sia $p: \tilde{X} \to X$ rivestimento universale di X. Allora $\pi_1(X)$ è in biiezione con $p^{-1}(*)$, $* \in X$.

Dim $\tilde{X}$ semplicemente connesso $\Rightarrow X$ connesso per archi.

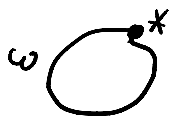
Sia $\tilde{*} \in p^{-1}(*)$ punto base per $\tilde{X}$.

$[\omega] \in \pi_1(X, *) \rightsquigarrow \tilde{\omega}: [0,1] \to \tilde{X}$ sollevamento di ω t.c. $\tilde{\omega}(0) = \tilde{*}$



$\varphi: \pi_1(X) \to p^{-1}(*)$, $\varphi([\omega]) = \tilde{\omega}(1)$

φ è ben definita per il teorema di sollevamento delle omotopie.



$a \in p^{-1}(*) \subset \tilde{X} \rightsquigarrow \lambda: [0,1] \to \tilde{X}$ cammino tra $\tilde{*}$ e a

$\rightsquigarrow \omega = p \circ \lambda: [0,1] \to X$ cappio t.c. $a = \varphi([\omega])$

$\Rightarrow \varphi$ suriettiva. Mostriamo che φ è iniettiva.

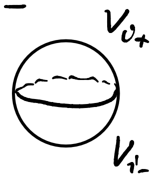
$\varphi([\omega_1]) = \varphi([\omega_2]) \Rightarrow a = \tilde{\omega}_1(1) = \tilde{\omega}_2(1) \Rightarrow \tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ cammini tra $*$ e a. $\tilde{X}$ sempl. connesso $\Rightarrow \exists H$ omotopia rel $\{0,1\}$ tra $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ $\Rightarrow p \circ H$ omotopia rel $\{0,1\}$ tra ω_1 e ω_2 $\Rightarrow [\omega_1] = [\omega_2]$.

Sia ora $p: S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ la restrizione di

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^n$$

$H_i : x_i = 0$ iperpiano di $\mathbb{R}P^n$, $U_i = \mathbb{R}P^n - H_i$

$$p^{-1}(U_i) = \{(x_0,\dots,x_n) \in S^n \mid x_i \neq 0\} = V_{i+} \sqcup V_{i-}$$



$V_{i+} : x_i > 0$

$V_{i-} : x_i < 0$

E' facile far vedere che

$p_{|V_{i\pm}} : V_{i\pm} \xrightarrow{\cong} U_i$ omeomorfismo.

Dato che $U_0,\dots,U_n$ sono aperti che ricoprono $\mathbb{R}P^n$ e $V_{i\pm}$ sono aperto in S^n segue che $p : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ è un rivestimento. Se $n \geqslant 2$ S^n è semplicemente connesso $\Rightarrow$ $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ è rivestimento universale per $n \geqslant 2$. $p^{-1}([x]) = \{x, -x\}$ $\forall [x] \in \mathbb{R}P^n$.

Teorema $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} 0 & n=0 \\ \mathbb{Z} & n=1 \\ \mathbb{Z}_2 & n \geqslant 2 \end{cases}$

Dim $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ ovvio

Se $n \geqslant 2$ $p: S^n \to \mathbb{R}P^n$ rivestimento universale e $\# p^{-1}(*) = 2 \Rightarrow \# \pi_1(\mathbb{R}P^n) = 2$ se $n \geqslant 2$.

A meno di isomorfismi esiste un solo gruppo di ordine 2: $\mathbb{Z}_2$. Quindi $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ se $n \geqslant 2$.

Teorema $\mathbb{C}P^n$ è semplicemente connesso $\forall n \geq 0$.

Dim Induzione su $n \geq 0$

$n = 0$ ovvio ($\mathbb{C}P^0$ è un punto). Supponiamolo vero per $n-1$ e dimostriamolo per $n \geq 1$.

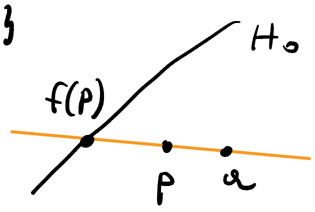
$H_0 : z_0 = 0$, $H_0 \subset \mathbb{C}P^n$ iperpiano di $\mathbb{C}P^n$, $H_0 \cong \mathbb{C}P^{n-1}$

$U = \mathbb{C}P^n - H_0$ aperto affine: $U \cong \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$.

$a = [1, 0, \dots, 0] \in U \rightsquigarrow V = \mathbb{C}P^n - \{a\}$ aperto

$\mathbb{C}P^n = U \cup V$; $\underbrace{U \cap V \cong \mathbb{C}^n - \{0\} \cong \mathbb{R}^{2n} - \{0\}}_{\text{connesso p.a. se } n \geq 1}$

$\pi_1(U) \cong 0$



$f : V \to H_0$, $f(p) = L(p, a) \cap H_0$

dove $L(p, a)$ è la retta proiettiva per p e a.

$L(p, a) - \{a\} \cong \mathbb{C}$ è una retta affine $\Rightarrow V \overset{\sim}{\to} H_0$

(deformazione affine) $\Rightarrow \pi_1(V) \cong \pi_1(H_0) \cong \pi_1(\mathbb{C}P^{n-1}) \cong 0$

Seifert-Van Kampen $\Rightarrow \pi_1(\mathbb{C}P^n) \cong 0$.

Invarianza topologica della dimensione

$\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow m = n$

Dim (solo per $m = 2$) $f : \mathbb{R}^2 \overset{\cong}{\to} \mathbb{R}^n$ omeo $\Rightarrow$

$f| : \mathbb{R}^2 - \{0\} \overset{\cong}{\to} \mathbb{R}^n - \{f(0)\}$ omeo. Ma

$\mathbb{R}^2 - \{0\} \simeq S^1$, $\mathbb{R}^n - \{f(0)\} \simeq S^{n-1} \Rightarrow S^1 \simeq S^{n-1}$

$\Rightarrow n - 1 = 1$ perché $S^0 = \{1, -1\}$ non è connesso

e $\pi_1(S^{n-1}) \cong 0$ se $n - 1 > 1$ mentre $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.