Esercizi teorici e polinomio di Taylor

1. **Esercizio 3, 31/01/2020**
   Sia $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e si supponga

   $$f(a) = f(b) = 0 \qquad f'(a) = f'(b) = 1$$

   Dimostrare che:

   (a) esiste $\overline{\xi} \in]a; b[$ tale che $f(\overline{\xi}) = 0$.

   (b) esistono almeno due punti $\xi_1, \xi_2 \in]a; b[$ con $\xi_1 < \xi_2$ tali che $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$;

   (c) se f è due volte derivabile allora esiste almeno un punto $\xi_3 \in]a; b[$ tale che $f''(\xi_3) = 0$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile infinite volte tale che

   $$\lim_{n\to+\infty}(f(2n) + 2n) = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} = (f(2n + 1) - (2n + 1)) = 0$$

   Dimostrare che:

   (a) la funzione si annulla infinite volte;

   (b) la derivata della funzione si annulla infinite volte;

   (c) per ogni $m \in \mathbb{N}$, la derivata m-esima della funzione si annulla infinite volte.

3. **Esercizio 3, 13/07/2021**
   Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa tale che

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

   Dimostrare che:

   (a) f non si può annullare più di una volta;

   (b) f é strettamente crescente;

   (c)
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

4. Calcolare gli sviluppi di Taylor delle seguenti funzioni nei punti indicati fino all'ordine n:

   (a) $f(x) = (e^{3x} - 1)sin(2x) \qquad n = 4,\ x_0 = 0$

   (b) $g(x) = ln(1 + sin(x)) \qquad n = 3,\ x_0 = 0$

   (c) $h(x) = ln(x) \qquad n = 3,\ x_0 = 2$

http://calvino.polito.it/~terzafac/Corsi/analisi1/pdf/Taylor-svolti.pdf

Soluzioni

1. (a) Prima di tutto notiamo che l'ipotesi di derivabilità della funzione f ne assicura la continuità nel dominio. Dal teorema di permanenza del segno applicato alla derivata esiste un intorno destro di a e uno sinistro di b in cui la derivata è positiva, la funzione sarà crescente nell'intorno destro di a e decrescente nell'intorno sinistro di b. Siano quindi $a < c < d < b$ tali che $f(c) > 0$ e $f(d) < 0$, dal teorema dei valori intermedi $f(x)$ assume in $[c; d]$ tutti i valori compresi fra $f(d)$ ed $f(c)$ e quindi esisterà un punto $\xi \in]c; d[\subset]a; b[$ tale che $f(\xi) = 0$.

   (b) Dal punto precedente abbiamo che $f(a) = f(\xi) = f(b) = 0$ quindi possiamo applicare due volte il teorema di Rolle, ovvero :

   $$f(a) = f(\xi) = 0 \implies \exists \xi_1 \in]a; \xi[: f'(\xi_1) = 0$$

   $$f(\xi) = f(b) = 0 \implies \exists \xi_2 \in]\xi; b[: f'(\xi_2) = 0$$

   ed essendo $\xi_1 \in]a; \xi[$ e $\xi_2 \in]\xi; b[$ si ha $\xi_1 < \xi_2$.

   (c) Ancora una volta sfruttiamo quanto ottenuto nel punto precedente e abbiamo che, essendo $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ si può applicare il teorema di Rolle alla derivata, perchè in quest ultimo punto si ha l'ipotesi aggiuntiva di derivabilità della $f'(x)$. Allora esiste un punto $\xi_3 \in]a; b[$ tale che $f''(\xi_3) = 0$.

2. (a) Un'informazione che si può dedurre dai due limiti è che, a meno di prendere n sufficientemente grande, la funzione sarà negativa in un intorno di 2n e positiva in un intorno di 2n+1. Si vuole quindi formalizzare questa idea per sfruttare il teorema degli zeri in un intorno. Dal primo limite, sfruttando la definizione di limite, si ha che $\forall \varepsilon > 0$ esiste un $M > 0$ tale che $f(2n) + 2n < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Analogamnete dal secondo limite $\forall \varepsilon > 0$ esiste un $N > 0$ tale che $f(2n+1) - (2n+1) < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Quindi a meno di scegliere $\varepsilon < 1$ per entrambe le definizioni e considerando R=maxM, N, per ogni $n > R$

   $$f(2n + 1) < 2n + 1 + \varepsilon \qquad f(2n) < \varepsilon - 2n$$

   Quindi si può applicare il teorema degli zeri all'intervallo $[2n; 2n + 1]$ poichè $f(2n) < 0$ ed $f(2n + 1) > 0$. Si può ripetere questo procedimento per ogni $n > R$ ottenendo così infiniti punti in cui la funzione si annulla.

   (b) Chiamiamo $\{x_n\}$ i valori individuati al punto precedente in cui la funzione $f(x)$ si annulla. Per ogni intervallo $[x_n; x_{n+1}]$ si può applicare il teorema di Rolle ottenendo un punto interno $\{y_n\}$ in cui la funzione ha derivata nulla.

(c) Stesso procedimento fatto al punto precedente si può ripetere con la successione di $\{y_n\}$, applicando Rolle alla derivata prima nell'intervallo $[y_n; y_{n+1}]$ e ottenendo in ogni intervallo un punto $\{z_n\}$ dove si annulla la derivata seconda. Iterando per le derivate successive si dimostra quanto richiesto.

3. (a) Se per assurdo $f(x)$ si annullasse due volte, denotando con x_1 ed x_2 i punti in cui la funzione si annulla, allora nell'intervallo $[x_1; x_2]$ avrei che $f(x) \leq 0$ per non contraddire la definizione di continuità. Dall'ipotesi sull'andamento per $x \to -\infty$ per definizione di limite ho però che esiste un $M < 0$ tale che $f(M) < 0$. Allora il rapporto incrementale per la coppia di punti M, x_1 e quello per x_1, x_2 contraddicono la definizione di convessità, (infatti $M < x_1 < x_2$).

   (b) Dire che $f(x)$ è strettamente crescente vuol dire dimostrare che per ogni $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$. Per ogni coppia x_1, x_2 scelgo $M < 0$ come al punto precedente tale che $f(M) < 0$, $M < x_1$ ed $f(M) < f(x_1)$, per la definizione di convessità devo avere:

$$\frac{f(M) - f(x_1)}{M - x_1} < \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

   Però il primo membro è positivo, per le scelte fatte su M, quindi deve esserlo anche il secondo, ovvero:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \iff f(x_1) - f(x_2) < 0$$

   (c) Dalla monotonia del punto precedente abbiamo che il limite a più infinito esiste, quindi i due casi possibili sono che la funzione tenda a un valore finito o che diverga. Se però la funzione tendesse a un valore finito l, avrei che per ogni successione di punti $\{x_n\}$ che tende a più infinito, le immagini tenderebbero ad l, quindi i rapporti incrementali sarebbero arbitrariamente piccoli: l'idea che ho in mente per dimostrare formalmente questo punto è che non potrei avere

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} < \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n+2})}{x_{n+1} - x_{n+2}}$$

   per esempio prendendo una successione con $x_n - x_{n-1} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, perchè a meno di considerare termini sufficientemente avanti nella successione avrei $f(x_{n+2}) - f(x_{n+1}) < f(x_{n+1}) - f(x_n)$ perchè $f(x_n) \to l$.