Geometria 3 — Topologia

Diario delle lezioni

A. A. 2021-2022

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Lezione 1. Topologie su insiemi, spazi topologici, sottoinsiemi aperti e chiusi, topologia banale, topologia discreta, la topologia Euclidea di R, basi di aperti.

Lezione 2. Spazi metrici, topologia Euclidea di R^n e di C^n, spazi vettoriali normati, spazi topologici metrizzabili. Sottospazi topologici, n-sfera S^n, n-boccia B^n.

Lezione 3. Metrizzabilità di sottospazi, intorni e basi di intorni, applicazioni continue, continuità in termini di basi di aperti.

Lezione 4. Omeomorfismi, immersioni, continuità negli spazi metrici, distanza da un sottoinsieme, isometrie.

Lezione 5. Applicazioni Lipschitziane tra spazi metrici, affinità di R^n come omeomorfismi. Operatori topologici: chiusura, frontiera, interno, esterno.

Lezione 6. Punti di accumulazione e insieme derivato, punti isolati, successioni in spazi topologici, convergenza. Spazi metrizzabili: unicità del limite, punti di aderenza come limiti di successioni, continuità mediante successioni.

Lezione 7. Confronto di topologie, unione topologica di una famiglia arbitraria di spazi, prodotto topologico di una famiglia finita di spazi, continuità di un'applicazione verso uno spazio prodotto, R^n come prodotto topologico, n-toro T^n, immergibilità di T^n in R^{n+1}.

Lezione 8. Cenni sul prodotto topologico di una famiglia arbitraria di spazi e continuità verso spazi prodotto. Metrizzabilità di unioni topologiche arbitrarie e di prodotti topologici finiti. Richiami sulle relazioni d'equivalenza, topologia quoziente, mappa quoziente, continuità di un'applicazione definita su uno spazio quoziente.

Lezione 9. Passaggio al quoziente di applicazioni continue, S^1 come quoziente dell'intervallo, quoziente di uno spazio rispetto ad un sottospazio, relazione di equivalenza indotta da un'applicazione. Quozienti di un quadrato identificandone i lati: cilindro, striscia di Möbius, toro, bottiglia di Klein. Spazi proiettivi reali e complessi RP^n e CP^n e loro realizzazione topologica come quozienti di sfere, continuità di applicazioni definite su uno spazio proiettivo.

Lezione 10. Esempi di funzioni continue su RP^n e CP^n, immersioni canoniche tra spazi proiettivi, proiettività come omeomorfismi, gruppo lineare proiettivo, carte affini canoniche come omeomorfismi. Assiomi di separazione T_1, T_2 (spazi di Hausdorff), T_3 (spazi regolari), T_4 (spazi normali). Caratterizzazione di T_1 in termini di chiusura dei punti, normalità degli spazi metrizzabili, proprietà di Hausdorff per gli spazi proiettivi, proprietà topologiche, ereditarietà.

Lezione 11. Topologia cofinita, ereditarietà di T_3, incapsulamento di chiusi mediante aperti in spazi normali, lemma di Urysohn (solo per spazi metrizzabili), caratterizzazione degli spazi di Hausdorff mediante diagonale chiusa, sottoinsiemi definiti da equazioni continue.

Lezione 12. Compattezza, compatti in spazi di Hausdorff, teoremi di omeomorfismo e di immersione da un compatto ad uno spazio di Hausdorff.

Lezione 13. Compattezza di $[0,1]$, teorema di Tychonoff (dimostrazione solo per prodotti finiti), teorema di Heine-Borel. Esempi notevoli: sfere, tori, spazi proiettivi, bottiglia di Klein.

Lezione 14. Compattificazione di Alexandroff, applicazioni proprie, proiezione stereografica, $S^n \cong \widehat{R}^n$.

Lezione 15. Topologia di RP^1 e di CP^1, teorema di Weierstrass sui massimi e minimi, teorema dell'intersezione di Cantor, cenni sulla compattezza per successioni, compattezza per successioni degli spazi metrizzabili compatti, teorema di Bolzano-Weierstrass. Spazi connessi, connessione di $[0,1]$, cammini continui, spazi connessi per archi, connessione degli spazi connessi per archi, immagini continue di spazi connessi e connessi per archi.

Lezione 16. Operazioni sui cammini: concatenazione e inversione. Spazi localmente connessi e localmente connessi per archi, connessione di spazi unione, componenti connesse e componenti connesse per archi, esempio standard di spazio connesso ma non connesso per archi.

Lezione 17. Componenti connesse (per archi) di spazi localmente connessi (per archi), spazio delle componenti connesse (per archi). Assiomi di numerabilità, sottoinsiemi densi, sottoinsiemi ovunque non densi, spazi separabili, II-numerabilità di spazi metrizzabili e separabili, II-numerabilità di R^n, componenti connesse (per archi) degli aperti di R^n.

Lezione 18. Omotopia, equivalenza omotopica, spazi contraibili, contraibilità dei convessi di R^n, omotopia relativa, omotopia di cammini, proprietà algebriche dei cammini a meno d'omotopia.

Lezione 19. Cappi in spazi topologici, cenni sullo spazio dei cappi, gruppo fondamentale, omomorfismo indotto da un'applicazione continua, funtorialità, invarianza omotopica, retrazione, retrazione per deformazione forte e debole, invarianza del gruppo fondamentale a meno di retrazione per deformazione forte.

Lezione 20. Dipendenza del gruppo fondamentale dal punto base e isomorfismo indotto da un cammino, gruppi fondamentali abeliani, abelianizzato, cenni sul primo gruppo d'omologia, omomorfismi indotti da applicazioni omotope, invarianza a meno d'equivalenza omotopica e a meno di retrazione per deformazione debole, nullità del gruppo fondamentale degli spazi contraibili, spazi semplicemente connessi.

Lezione 21. Rivestimenti, rivestimento $R \to S^1$, numero di Lebesgue di un ricoprimento aperto, teoremi di sollevamento dei cammini e delle omotopie.

Lezione 22. Gruppo fondamentale di S^1, gruppo fondamentale di uno spazio prodotto, gruppi fondamentali dei tori, teorema di non retrazione (in dimensione due), teorema del punto fisso di Brouwer, grado di un'applicazione $S^1 \to S^1$, proprietà moltiplicativa del grado, teorema di omotopia per applicazioni $S^1 \to S^1$, teorema fondamentale dell'algebra.

Lezione 23. Gruppi liberi, presentazioni di gruppi, prodotto libero di gruppi e proprietà universali. Teorema di Seifert-Van Kampen e cenni sulla dimostrazione, semplice connessione delle sfere.

Lezione 24. Unione puntata di spazi, gruppo fondamentale di un bouquet di circonferenze e del piano privato di un numero finito di punti. Sollevamento di cappi sul rivestimento universale e ordine del gruppo fondamentale. Gruppi fondamentali degli spazi proiettivi reali e complessi. Invarianza topologica della dimensione.