

Geometria 3 – Topologia

Programma del corso

Docente: Prof. Daniele Zuddas

A. A. 2021-2022

Spazi topologici, sottoinsiemi aperti e chiusi, basi di aperti. Spazi metrici, topologia Euclidea su R^n . Sottospazi topologici, sfere.

Intorni, basi di intorni, applicazioni continue, omeomorfismi, immersioni, continuità negli spazi metrici, isometrie.

Operatori topologici: chiusura, frontiera, interno, esterno. Punti di accumulazione e insieme derivato, punti isolati, successioni. Spazi metrizzabili: unicità del limite, punti di aderenza come limiti di successioni, continuità mediante successioni.

Unioni e prodotti topologici, tori, metrizzabilità.

Spazio quoziente. Quozienti di un quadrato: striscia di Möbius, bottiglia di Klein. Spazi proiettivi reali e complessi, carte affini.

Assiomi di separazione T_1 , T_2 (spazi di Hausdorff), T_3 (spazi regolari), T_4 (spazi normali). Normalità degli spazi metrizzabili, proprietà di Hausdorff per gli spazi proiettivi, proprietà topologiche, ereditarietà, topologia cofinita. Lemma di Urysohn (solo per spazi metrizzabili).

Spazi compatti, compatti in spazi di Hausdorff. Teorema di Tychonoff (dimostrazione solo per prodotti finiti), teorema di Heine-Borel. Compattificazione di Alexandroff, applicazioni proprie, proiezione stereografica.

Topologia di RP^1 e di CP^1 , teorema di Weierstrass, teorema dell'intersezione di Cantor, cenni sulla compattezza per successioni, teorema di Bolzano-Weierstrass.

Connessione e connessione per archi. Spazi localmente connessi (per archi), componenti connesse (per archi).

Assiomi di numerabilità, sottoinsiemi densi, spazi separabili, proprietà di numerabilità degli spazi Euclidei.

Omotopia, equivalenza omotopica, spazi contraibili, omotopia di cammini. Gruppo fondamentale, funtorialità, invarianza omotopica, invarianza a meno di retrazione per deformazione. Dipendenza dal punto base, abelianizzato, cenni sul primo gruppo d'omologia, applicazioni omotope, invarianza a meno d'equivalenza omotopica, spazi semplicemente connessi.

Rivestimenti, sollevamenti di cammini e di omotopie.

Gruppo fondamentale di S^1 , gruppo fondamentale di uno spazio prodotto, teorema di non retrazione (in dimensione due), teorema del punto fisso di Brouwer, grado di un'applicazione $S^1 \rightarrow S^1$, proprietà moltiplicativa, omotopia di applicazioni $S^1 \rightarrow S^1$, teorema fondamentale dell'algebra.

Gruppi liberi, presentazioni di gruppi, prodotto libero e proprietà universali. Teorema di Seifert-Van Kampen e cenni sulla dimostrazione, semplice connessione delle sfere.

Bouquet di circonferenze. Rivestimento universale e ordine del gruppo fondamentale. Gruppi fondamentali degli spazi proiettivi reali e complessi. Cenni sull'invarianza topologica della dimensione.