Teorema Sia V uno spazio vettoriale Euclideo (o Hermitiano) e sia $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ una base <u>ortonormale</u> per V. Allora un endomorfismo $f: V \to V$ è autoaggiunto $\Leftrightarrow$ $M_{\mathcal{U}}(f)$ è una matrice simmetrica reale (o Hermitiana).

Dim Dimostriamolo nel <u>caso Hermitiano</u>, lasciando la dimostrazione nel caso Euclideo per esercizio (è simile).

$A = M_{\mathcal{U}}(f) \in M_n(\mathbb{C})$, $v = (X)^{\mathcal{U}}$, $w = (Y)^{\mathcal{U}} \in V$ con $X, Y \in \mathbb{C}^n$

f autoaggiunta $\Leftrightarrow \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \ \forall v, w \in V$. Si ha:

$$\langle f(v), w \rangle_V = \langle AX, Y \rangle_{\mathbb{C}^n} = {}^t(\overline{AX})\, Y = {}^t\overline{X}\, {}^t\overline{A}\, Y$$

$$\langle v, f(w) \rangle_V = \langle X, AY \rangle_{\mathbb{C}^n} = {}^t\overline{X}\, A Y$$

f autoaggiunta $\Leftrightarrow$ ${}^t\overline{X}\, {}^t\overline{A}\, Y = {}^t\overline{X}\, A Y \quad \forall X, Y \in \mathbb{C}^n$

Questa uguaglianza è vera $\Leftrightarrow$ ${}^t\overline{A} = A$ $\Leftrightarrow$ A Hermitiana

Corollario Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$. Allora $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è autoaggiunta $\Leftrightarrow$ A è Hermitiana.

Corollario Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Allora $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è autoaggiunta $\Leftrightarrow$ A è simmetrica.

Corollario Sia V uno spazio vettoriale Euclideo (o Hermitiano), con $\dim V = n$, e sia $f: V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto. Allora il polinomio caratteristico p_f ha soltanto zeri reali. In altre parole, tutti gli autovalori di f sono reali.

Teoremi spettrali

Caso Euclideo

Teorema spettrale Sia V uno spazio vettoriale Euclideo di dimensione finita, e sia $f: V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto. Allora esiste una base ortonormale per V che diagonalizza f.

Dim Induzione su $n = \dim V$.

Base dell'induzione: $n = 1$

Sia $u \in V$ t.c. $\|u\| = 1$. Allora u è base ortonormale diagonalizzante.

Ipotesi induttiva: supponiamo che il teorema sia vero in dimensione $n-1 \geq 1$ e dimostriamolo in dimensione n.

Per il corollario precedente, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di f e sia v un autovettore relativo a $\lambda \Rightarrow f(v) = \lambda v$.

Possiamo assumere $\|v\| = 1$ (normalizzandolo se necessario).

$U = \operatorname{span}(v)^\perp \subset V$ sottospazio vett. $\dim U = n-1$

Mostriamo che $f(U) \subset U$: $\forall u \in U$ si ha

$\langle v, f(u) \rangle = \langle f(v), u \rangle = \langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = 0$

$\Rightarrow f(u) \in U$. Consideriamo U col prodotto scalare indotto da V. Allora $f|_U : U \to U$ è un endomorfismo autoaggiunto. Ipotesi induttiva $\Rightarrow \exists\ (u_1, \dots, u_{n-1})$ base ortonormale di U che diagonalizza $f|_U$. Posto $u_n = v$, $(u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale di V che diag. f.

Corollario Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica reale. Allora $\exists\, U \in O(n)$ t.c. $D = U^{-1} A U$ è diagonale.

Dim $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ autoaggiunta $\Rightarrow \exists\, \mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ t.c. $M_{\mathcal{U}}(L_A) = D$ matrice diag.

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sono gli autovalori relativi, rispettivamente, a $u_1, \dots, u_n$, allora $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$U = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{U}}(id_{\mathbb{R}^n})$ matrice del cambiamento di base, avente per colonne gli autovettori $u_1, \dots, u_n$.

Allora $D = U^{-1} A U$.

OSS A meno di cambiare segno ad una colonna di U possiamo assumere $U \in SO(n)$. $U^{-1} = {}^tU$.

Def Una matrice simmetrica $B \in M_n(\mathbb{R})$ è definita positiva se ${}^tX B X > 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, cioè se la forma bilineare simmetrica associata a B è definita positiva.

Corollario Una matrice simmetrica $B \in M_n(\mathbb{R})$ è definita positiva $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori di B sono > 0.

Dim $\exists\, U \in O(n)$ t.c. $D = U^{-1} B U = {}^tU B U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ autovalori di B (contati con la molteplicità)

$\Rightarrow D$ è la matrice della forma bilineare associata a B rispetto ad un'altra base di $\mathbb{R}^n$.

$${}^tX D X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 > 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

(basta considerare $X = e_j$, $j = 1, \dots, n$).

Es Trovare $S \in SO(2)$ t.c. ${}^tSAS$ sia diagonale, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

${}^tS = S^{-1}$.

$$p_A = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 4 = (x+1)(x-3)$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ autovalori

$\lambda_1 = -1$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad x+y=0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ autovettore

$\lambda_2 = 3$: $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad x-y=0 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in SO(2)$$

$$D = {}^tSAS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = S^{-1}AS$$

$$A = SDS^{-1} \implies A^n = SD\cancel{S^{-1}}\cancel{S}D\cancel{S^{-1}}\cdots\cancel{S}DS^{-1} = SD^nS^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

In questo modo è facile calcolare le potenze di A:

$$A^n = SD^n\,{}^tS = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n & 3^n \\ -(-1)^n & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^{n+1} + 3^n \\ (-1)^{n+1} + 3^n & (-1)^n + 3^n \end{pmatrix}.$$

Caso Hermitiano

Teorema spettrale Sia V uno spazio vettoriale Hermitiano di dimensione finita, e sia $f : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto. Allora esiste una base ortonormale di V che diagonalizza f.

Dim Per induzione su $n = \dim V$

Base dell'induzione: $n = 1$ banale (come sopra)

Ipotesi induttiva: Supponiamolo vero per dim $n-1 \geq 1$ e dimostriamolo per dim n.

$\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di $f \rightsquigarrow v \in V$ autovettore, $\|v\| = 1$

$U = \mathrm{Span}(v)^\perp \subset V \quad \dim U = n-1$

$\forall\, u \in U, \quad \langle v, f(u) \rangle = \langle f(v), u \rangle = \langle \lambda v, u \rangle = 0$

$\Rightarrow f(u) \in U \Rightarrow f(U) \subset U \Rightarrow f|_U : U \to U$ autoaggiunto

ip. ind. $\Rightarrow \exists\, (u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale di U che diagonalizza $f|_U$. Allora posto $u_n = v$, $(u_1, \dots, u_n)$ è base diagonalizzante per f.

Def Sia $U \in M_n(\mathbb{C})$. Diciamo che U è una *matrice unitaria* se ${}^t\overline{U}\, U = I_n$.

$$U(n) \overset{\text{def}}{=} \{ U \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{U}\, U = I_n \}$$

è detto *gruppo unitario*.

OSS $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitaria $\Leftrightarrow U^{-1} = {}^t\overline{U}$

$\Rightarrow U(n) \subset GL_n(\mathbb{C})$.

OSS $U \in U(n) \Rightarrow |\det U| = 1$, infatti:
$\det({}^t\bar{U}\, U) = 1 \Rightarrow \overline{\det U}\, \det U = 1 \Rightarrow |\det U|^2 = 1$.

$U \in U(n)$ è detta matrice unitaria speciale se $\det U = 1$
$SU(n) \overset{\text{def}}{=} \{ U \in U(n) \mid \det U = 1 \}$ gruppo unitario speciale

Analogamente al caso reale, $U \in U(n) \iff$ le colonne (le righe) di U formano base ortonormale per $\mathbb{C}^n$.

Corollario Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrice Hermitiana. Allora $\exists\, U \in U(n)$ t.c. $D = U^{-1} A U$ è diagonale reale (le entrate nella diagonale sono gli autovalori).

La dimostrazione è simile al caso reale ed è lasciata per esercizio.

Def Sia V uno spazio vettoriale Hermitiano. Un'applicazione lineare $f : V \to V$ è unitaria se

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle, \qquad \forall\, v, w \in V.$$

OSS Le applicazioni unitarie sono analoghe alle applicazioni lineari isometriche nel caso reale. Come nel caso reale unitaria $\Rightarrow$ iniettiva e quindi se $\dim V < \infty$ unitaria $\Rightarrow$ isomorfismo.

Teorema Supponiamo $\dim V < \infty$. $f : V \to V$ è unitaria $\iff$ f manda base ortonormale in base ortonormale $\iff$ $M_v(f) \in U(n)$, con v base ortonormale di V.

OSS $f : V \to V$ unitario, $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di f $\Rightarrow |\lambda| = 1$. Infatti sia $v \in V - \{0\}$ autovettore relativo a λ ; $f(v) = \lambda v$

$$\langle f(v), f(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

$$\langle \lambda v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \lambda \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \|v\|^2 \Rightarrow |\lambda|^2 = 1.$$

Caso unitario

Teorema spettrale Sia V uno spazio vettoriale Hermitiano di dimensione finita, e sia $f : V \to V$ automorfismo unitario. Allora $\exists$ base ortonormale per V che diagonalizza f.

Dim Induzione su $n = \dim V$.

$n = 1$ ovvio. Supponendo vero per $\dim n-1 \geq 1$ e dimostriamolo per $\dim n$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di f, $v \in V$ autovettore t.c. $\|v\| = 1$

$U = \operatorname{span}(v)^\perp \Rightarrow \dim U = n-1$. $\forall u \in U$ si ha:

$$\lambda \langle f(u), v \rangle = \langle f(u), \lambda v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle = 0$$

$\Rightarrow \langle f(u), v \rangle = 0$ perché $\lambda \neq 0$ $(|\lambda| = 1)$.

Quindi $f(u) \in U$ $\forall u \in U \Rightarrow f(U) = U$, dato che $f(U) \subset U$ e $\dim f(U) = \dim U = n-1$ perché f è un isomorfismo. Allora $f|_U : U \to U$ è un automorfismo unitario.

Ip. Indutt. $\Rightarrow \exists (u_1, \dots, u_{n-1})$ base ortonormale di U che diagonalizza $f|_U$. Quindi posto $u_n = v$, $(u_1, \dots, u_n)$ è base ortonormale di V che diagonalizza f.