ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 10

Trieste, 14 gennaio 2022

1. Sia $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Dimostrare che A ha solo autovalori reali ed è sempre diagonalizzabile.

2. a) Considerare le seguenti applicazioni $< \cdot, \cdot >_j: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ per $j = 1, 2, 3$, dove $z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2)$:
$$< z, w >_1 = z_1 w_1 - i z_1 w_2 + i z_2 w_1;$$
$$< z, w >_2 = \bar{z}_1 w_1 - i \bar{z}_1 w_2 - i \bar{z}_2 w_1;$$
$$< z, w >_3 = \bar{z}_1 w_1 - i \bar{z}_1 w_2 + i \bar{z}_2 w_1.$$
Di ciascuna dire se è una forma sesquilineare hermitiana, e in caso positivo dire se è un prodotto scalare e scrivere la sua matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^2$.
b) Analogamente per le seguenti applicazioni $< \cdot, \cdot >_j: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dire di ciascuna se è bilineare simmetrica, e in caso affermativo se è un prodotto scalare:
$$< x, y >_1 = x_1^2 + x_2 y_2 - 2 y_3^2;$$
$$< x, y >_2 = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 4x_3y_3;$$
$$< x, y >_3 = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_3.$$

3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si fissi il prodotto scalare standard. Si consideri il sottospazio vettoriale
$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_3 - 3x_4 = x_1 + x_2 - x_3 = 0\};$$
si calcoli una base ortonormale di W e la si completi a una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

4. a) Dati $x_0 = (1 + \sqrt{2})e_1 + e_3, y_0 = -e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^3$, calcolare la norma di x_0 e l'angolo convesso fra x_0 e y_0 rispetto al prodotto scalare
$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 3x_3y_3.$$
b) Rispetto allo stesso prodotto scalare, trovare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ con $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (3, 1, 1)$, completarla a una base $\mathcal{B}$ ortonormale di $\mathbb{R}^3$, e calcolare le coordinate di $v_0 = e_1 + 2e_2$ rispetto a $\mathcal{B}$.

5. Può esistere un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $\mathbb{R}^2$ tale che
$$\langle (1, -1), (2, 3) \rangle = 5, \ \langle (4, -4), (-4, -6) \rangle = -1?$$

6. (Appello del 2 settembre 2021)

Considerare il prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^3$. Denotiamo con e_1, e_2, e_3 la base canonica. Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ lo spazio delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

(i) Determinare la dimensione e una base ortonormale di U.

(ii) Determinare un'equazione lineare in x_1, x_2, x_3 che abbia $U^\perp$ come spazio delle soluzioni.

(iii) Estendere la base di U trovata al punto (i) a una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.