Geometria 1

Simulazione d'esame

Anno accademico 2021-2022

15/1/2022

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita come

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3).$$

   (a) Verificare che f è lineare determinarne rango, nullità, una base del nucleo e una dell'immagine.

   (b) Dopo aver verificato che i vettori $t_1 = (1, 1, -1)$, $t_2 = (1, -1, 0)$, $t_3 = (-1, 0, 1)$ formano una base $\mathcal{T}$ di $\mathbb{R}^3$, e che i vettori $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, -1)$ formano una base $\mathcal{U}$ di $\mathbb{R}^2$, scrivere la matrice $M^{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}(f)$.

2) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ determinato da A è simmetrico rispetto al prodotto scalare canonico, e quindi diagonalizzabile. Trovare una base ortonormale di autovettori, una matrice diagonale D simile ad A e $S \in \mathrm{SO}(2)$ tale che $A = SDS^{-1}$. Verificare che esiste $X \in M_2(\mathbb{R})$ tale che $X^3 = A$.

3) Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale di equazione $4x - 3y = 0$. Determinare una base ortonormale di W e completarla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Detta $\mathcal{U}$ tale base, scrivere le matrici del cambiamento di base $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{U}}$ e $M^{\mathcal{U}}_{\mathcal{E}}$ dove $\mathcal{E}$ denota la base canonica.

4) Sia $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'endomorfismo definito da $f(x_1, x_2, x_3) = (hx_2, -hx_1, hx_3)$, dove h è un parametro reale. Supponiamo $\mathbb{C}^3$ dotato del prodotto Hermitiano canonico. Determinare i valori di h per cui f risulta unitaria. Per tali valori di h trovare gli autospazi di f e una base ortonormale diagonalizzante.

5) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale reale V. Dimostrare che se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di f, allora λ^s è un autovalore della potenza s-esima di f, $f^s = f \circ f \circ \cdots \circ f$, composizione di s copie di f. Dedurre che se $f^s = f$ per un certo $s \geq 2$, allora f non ha autovalori in $\mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$.