Esiste anche un altro tipo di anomalia **COVARIANT ANOMALY**

per correnti L, R (diversa regolarizzazione rispetto a CONS. AN.)

$$\langle (D_\mu j^{H\mu})^a \rangle = \eta_H \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \, \mathrm{tr}\left(t^a F^H_{\mu\nu} F^H_{\rho\sigma} \right) \qquad H = L,R$$

$$j^{L,R\,\mu\,a} = \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \right) \psi = \frac{1}{2} \left(j^{\mu a} \pm j_A^{\mu a} \right)$$

$$A_\mu^{L,R} = A_\mu^V \pm A_\mu^A$$

In $\mathcal{L}$
$\sim j^{L\mu a} A_\mu^{aL} + j^{R\mu a} A_\mu^{aR}$
$\Leftrightarrow j^\mu A_\mu^{aV} + j_A^\mu A_\mu^{aA}$

$\hookrightarrow$ se $A_\mu^A \equiv 0 \Rightarrow A_\mu^{L,R} = A_\mu$

e $\langle (D_\mu j_A^\mu)^a \rangle = \langle (D_\mu j^{L\mu})^a \rangle - \langle (D_\mu j^{R\mu})^a \rangle =$

$$= 2 \left[-\frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \, \mathrm{tr}\left(t^a F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right) \right] = -\frac{1}{16\pi^2} \epsilon \, \mathrm{tr}(tFF)$$

cioè (*).

ANOMALY CANCELLATION CONDITIONS (Anomalia deve essere assente per le simm. di GAUGE)

1) VECTOR-LIKE MODEL (es. QED, QCD):

A_μ si accoppia a j_V^μ $\rightarrow$ l'ANOMALIA può essere confinata a j_A^μ con opportuna scelta di regolarizzaz.

$\hookrightarrow$ non è gaugiata $\Rightarrow$ ok!

2) "SAFE GROUPS". Prendiamo modelli con molti fermioni L e R accoppiati diversam. ai bosoni di gauge $\rightsquigarrow$ ci sono

anomalie nelle sim. di gauge. Però l'anomalia può annullarsi in casi particolari: ricordiamo che l'anomalia è proporzionale a

$$C^{abc} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\{t^a, t^b\}\,t^c\right)$$

Se $C^{abc}=0$, tutte le anomalie si cancellano.
Questo avviene per

$SU(2)$, $SO(2N+1)$, $SO(4N)$ $N \geq 2$, E_6, E_8

⇝ In particolare $SU(N)$ $N \geq 3$ non sono safe.

3) MODELLO STANDARD : $SU(2) \times U(1)_Y$

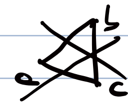
Qui i bosoni di gauge accoppiano diversam. alle correnti L e R.

In 4d il coniugato di uno spinore R è uno spinore L : possiamo quindi considerare tutti spinori L in SM

Famiglia :

		Rep	
	ℓ_L	2_{-3} (L-hand)	
	e_R	1_{-6}	$\rightarrow 1_{+6}$ (L-hand)
$i=1,2,3$	q_L^i	2_1 (L-hand)	
	u_R^i	1_4	$\rightarrow 1_{-4}$ (L-hand)
	d_R^i	1_{-2}	$\rightarrow 1_{+2}$ (L-hand)

nel loop circolano tutti i fermioni accoppiati ai bosoni di gauge

Per $SU(2)$ $\quad C^{abc}=0 \quad \Rightarrow \quad tr(\underbrace{T^aT^bT^c}_{\text{gen. di } SU(2)}) = 0$ 

$\rightarrow$ consideriamo $\quad tr(T^aT^bT_Y)$

$\quad$ e $tr(T_Y^{\,3})$

$T^a_R = 0 \quad$ quando $\quad R=1$ (i corrispondenti fermioni non circolano nel loop ◁)

$$tr(T^aT^bT_Y) = tr\begin{pmatrix} t^a_{R_1}t^b_{R_1}\, q_Y^{R_1}\, \mathbb{1}_{dimR_1} & & \\ & t^a_{R_2}t^b_{R_2}\, q_Y^{R_2}\, \mathbb{1}_{dimR_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} =$$

per rap non triviali

$$= \sum_i q_Y^{R_i}\,\delta^{ab}\,c(R_i) = q_Y^{\ell_L}\,\delta^{ab}\,c(R_{\ell_L}) + 3\times q_Y^{q_L}\,\delta^{ab}\,c(R_{q_L}) =$$

$$= -3\cdot\delta^{ab}\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot 1\cdot\delta^{ab}\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Per $SU(3)$

$$tr(T^aT^bT_Y) = 2\,q_Y^{q_L}\,\delta^{ab}\,c(R_{q_L}) + q_Y^{u_R^c}\,\delta^{ab}\,c(R_{u_L}) + q_Y^{d_R^c}\,\delta^{ab}\,c(R_{d_L})$$

$$= 2\cdot 1\cdot\delta^{ab}\cdot\frac{1}{2} + (-4)\cdot\delta^{ab}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\delta^{ab}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \delta^{ab}(1-2+1) = 0$$

Ora solo $U(1)_Y$

$$Tr(T_Y^{\,3}) = \sum_i \left(q_Y^{R_i}\right)^3 \cdot dimR_i =$$

$$= \overset{\ell_L}{-27\cdot 2} + \overset{e_R}{216} + 3\cdot\left(\overset{q_L}{1\cdot 2} \overset{u_R^c}{-64} \overset{d_R^c}{+8}\right)$$

$$= 162 + 3\cdot(-54) = 0$$

↳ è essenziale per la cancellazione delle ANOMALIE

\# di COLORI

qta cancellazione diede evidenza all'esistenza del quark TOP prima che venisse scoperto.

4) NON-LOCAL TERM

Cancellano anomalie aggiungendo alla Lagrangiana un termine NON-LOCALE

Es. (Abelian case)

$$S_{non-loc} = \frac{1}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int dx \int dy \, \partial^\lambda A_\lambda^L(x) D(x-y) F_{\mu\nu}^L F_{\alpha\beta}^L(y)$$

$$\delta S_{non-loc} = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int dx \, \Lambda^L(x) \partial_\mu A_\nu^L(x) \partial_\alpha A_\beta^L(x)$$

cancella l'anomalia

5) LOCAL COUNTER-TERMS con campi aggiuntivi

E.g. $S_{add} = \frac{1}{96\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int dx \, \varphi^L(x) F_{\mu\nu}^L F_{\alpha\beta}^L(x)$

con $\delta\varphi^L(x) = \Lambda^L(x)$ "axion"