INDEX & ANOMALY

Il calcolo della Jacobiana col P.I. corrisponde al calcolo dell' INDICE dell' OP. DI DIRAC per una data chiralità.

In spazio Euclideo

$\not{D}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \qquad \{\varphi_n\}$ è completo e o.n.

$$\Downarrow$$

$\not{D}(\gamma_5\varphi_n) = -\gamma_5 \not{D}\varphi_n = -\lambda_n(\gamma_5\varphi_n)$

$\Rightarrow$ se φ_n è autof. con autoval λ_n, allora $\gamma_5\varphi_n$ è autof. con autov. $-\lambda_n$.

Qto ci dice anche che le autofunzioni di $\not{D}$ con autovalore non-nullo non possono avere chiralità definita!

$\Rightarrow$ Se $\lambda_n \neq 0$ allora φ_n e $\gamma_5\varphi_n$ sono ORTOGONALI, cioè $(\varphi_n, \gamma_5\varphi_n) = \int dx\, \varphi_n^\dagger(x)(\gamma_5\varphi_n(x)) = 0$

[Infatti: $(\gamma_5\varphi_n, \not{D}\varphi_n) = \lambda_n(\gamma_5\varphi_n, \varphi_n)$
$= (\not{D}\gamma_5\varphi_n, \varphi_n) = -\lambda_n(\gamma_5\varphi_n, \varphi_n)$ $\Rightarrow \lambda_n(\gamma_5\varphi_n, \varphi_n) = 0$

$\rightarrow$ questo non è necessariam. vero per gli ZERO MODI, cioè φ_n^0 t.c. $\not{D}\varphi_n^0 = 0$:

in qto caso φ_n^0 e $\gamma_5\varphi_n^0$ sono autof. relativi allo stesso autovalore $(\lambda_n = 0)$ Inoltre ora possiamo avere autofunz. a chiralità definita (in tal caso φ_n^0 e $\gamma_5\varphi_n^0$ sono proporzionali).

questo è vero per loro combinazioni lineari, in part.

$$\varphi_{n+}^0 = \frac{1+\gamma_5}{2}\varphi_n^0 \quad \text{e} \quad \varphi_{n-}^0 = \frac{1-\gamma_5}{2}\varphi_n^0$$

$\rightarrow$ $\varphi_{n\pm}^0$ sono anche autovett. di γ_5 con autov. ± 1.

Torniamo al calcolo dello Jacobiano:

$$J[\beta] = e^{-2i \int dx\, \beta(x) \underbrace{\sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 \varphi_n(x)}}$$

$\hookrightarrow$ avevamo calcolato: $\frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathrm{tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$

- consideriamo J valutato in $\beta(x) = \beta$ cost.; allora

$$\int dx \sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma_5 \varphi_n(x) = \sum_n \int dx\, \varphi_n^\dagger(x) \left(\gamma_5 \varphi_n(x)\right) =$$

$$= \sum_n \int dx\, \varphi_n^{0\dagger}(x) \gamma_5 \varphi_n^0(x) =$$

somma sugli zero-modi

$$= \sum_n \underbrace{\int dx\, \varphi_{n+}^{0\dagger}(x) \varphi_{n+}^0(x)}_{=1 \quad (\text{o.n.})} - \sum_n \int dx\, \varphi_{n-}^{0\dagger}(x) \varphi_{n-}^0(x)$$

$$= n_+ - n_- \equiv \mathrm{ind}\, D_+$$

$$D_+ = \not{D}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)$$

Col conto sull'anomalia abbiamo ottenuto un altro risult. per ind D_+, che deve coincidere

$$\mathrm{ind}\, D_+ = \frac{1}{32\pi^2} \int dx\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathrm{tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{M_4} \mathrm{tr}\, F \wedge F$$

Teorema di ATIYAH-SINGER (dimostrato su manifold compatti)

In $\mathbb{R}^4$ dobbiamo assumere che

$A_\mu \to i U^{-1} \partial_\mu U$ a $x \to \infty$

GLOBAL ANOMALIES - SU(2) (Witten)

Ricordiamo che $c^{abc} = 0$ per $SU(2)$ $\longrightarrow$ non ci sono anomalie perturbative

Ma,

Witten: teoria di gauge $SU(2)$ con un SINGOLO FERMIONE di WEYL nella rap. FONDAMENTALE è MATEMATICAM. INCONSISTENTE.

(Le sole teorie $SU(2)$ consist. sono quelle con materia vector-like, cioè spin. di Dirac.)

Vediamo perché:

prendiamo uno spin. di Dirac (massless) in rap. fond. di $SU(2)$.

Nello sp. Euclideo, il P.I. è

$$\int \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar\psi \; e^{-\int d^4x \frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + i \int \bar\psi \not{D} \psi \, d^4x}$$

$$= \int \mathcal{D}A \; e^{-\int d^4x \frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}} \underbrace{\det i\not{D}}_{\text{può essere regolarizzato}}$$

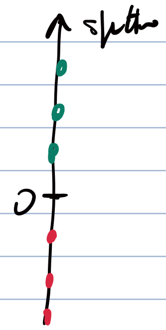
Consideriamo uno spinore chirale: $\psi = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi$

$\rightarrow$ P.I.:
$$\int \mathcal{D}A\; e^{-\int d^4x \frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}} \det\left(i\not{D}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\right)$$

In convenzioni che usiamo qui

$i\not{D}$ è hermitiano $\quad i\not{D}\,\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \rightsquigarrow i\not{D}(\gamma_5\varphi_n) = -\lambda_n(\gamma_5\varphi_n)$

Prendiamo A_μ t.c. $\not{D}$ non ha zero modi; gli autovalori si dividono in positivi e negativi



$$\det(i\not{D}) = \prod_n \lambda_n$$

$$\det\left(i\not{D}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\right) = \prod_n \lambda_n = \left(\det i\not{D}\right)^{1/2}$$

prodotto su metà degli autovalori

C'è un'ambiguità nella scelta del segno $\pm$

(Necessitiamo di una regolarizzazione che prescriva che segno prendere)

Per definire un segno, abbiamo bisogno di una prescrizione di come prendere metà autovalori

- Iniziamo con un fondo A^*_μ e per questo definiamo

$$\left(\det i\not{D}\right)^{1/2} = \text{prodotto degli AUTOVALORI POSITIVI}$$

- Deformando A^*_μ a un generico A_μ, gli autovalori cambiano di valore. Può succedere che un autovalore diventi negativo $\rightarrow$ $(\det i\not{D})^{1/2}$ ha segno $-$ per il corrispondente A_μ.

Questa definizione è consistente se il segno è gauge-inv., cioè se la definizione di $(\det i\not{D})^{1/2}$

dà lo stesso risultato per A_μ e A_μ^a dove U è una trasf. di gauge.

Consideriamo $U(x)$ t.c. $U(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \mathbb{1}$ $\quad (\mathbb{R}^4 \simeq S^4)$

↪ classificate da $\underbrace{\Pi_4(SU(2))}_{=\mathbb{Z}_2}$ (mappe da $S^4 \to S^3$)

ci sono due classi (triviale e non-triviale)

Sotto una trasf. non-triviale $(\det i\not{D})^{1/2} \to -(\det i\not{D})^{1/2}$

Imporre che $(\det i\not{D})^{1/2}$ sia lo stesso per le due config. gauge-equiv. vuol dire che $(\det i\not{D})^{1/2} = -(\det i\not{D})^{1/2}$, cioè $(\det i\not{D})^{1/2} = 0 \longrightarrow$ teoria di campo inconsist.

ANOMALIA GLOBALE