

Trostando il problema dello spin di e^- e p ,
abbiamo cercato lo stato di singoletto $|1\ 0\rangle$ applicando
l'operatore distruzione allo stato $|1\ 1\rangle$:

$$S_- |1\ 1\rangle = (S_-^{(1)} + S_-^{(2)}) |1\ 1\rangle$$
$$= \hbar |1\ 0\rangle + \hbar |1\ 0\rangle$$

questo costante $\hbar$ deriva da come l'operatore agisce

In generale, un operatore di spostamento $L_{\pm}$ che agisce su
stati $|l\ m\rangle$ manda gli stati in su o in giù di uno
step in m , quindi in $|l\ m\pm 1\rangle$:

$$L_{\pm} |l\ m\rangle = A_l^m |l\ m\pm 1\rangle$$

ma non conserva la normalizzazione. Infatti introduce
una costante A_l^m - lo stato va dunque rinormalizzato e posteriori

Si può calcolare quanto vale A_l^m usando un po' di algebra.

FACOLTATIVO

Calcolo di A_e^m

Per calcolare A_e^m mi serve prima dimostrare che:

$$(L_{\pm})^{\dagger} = L_{\mp}$$

Ovvero che l'hermitiano coniugato di L_{-} è L_{+} e viceversa

(NOTA L_{+} e L_{-} non sono operatori hermitiani)

Per farlo, vediamo che, date due funzioni di stato generiche f e g , possiamo scrivere:

$$\langle f | L_{+} g \rangle = \langle f | L_x g \rangle + i \langle f | L_y g \rangle$$

- L_x e L_y sono hermitiani
- $(\bar{z}A)^{\dagger} = \bar{z}A^{\dagger}$

$$= \langle L_x f | g \rangle + \langle -iL_y f | g \rangle$$

$$= \langle (L_x - iL_y) f | g \rangle = \langle L_{-} f | g \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{L_{+}^{\dagger} = L_{-}}$$

esteso cose
per dimostrare che $L_{-}^{\dagger} = L_{+}$

Ora, avevamo visto che:

$$L_{\pm} L_{\mp} = L^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z$$

Quindi; se ho lo stato $|e^m\rangle = |l, m\rangle$, posso scrivere:

$$\begin{aligned}\langle l, m | L_{\mp} L_{\pm} | l, m \rangle &= \langle l, m | L^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z | l, m \rangle \\ &= \left(\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2 \mp \hbar m \right) \langle l, m | l, m \rangle \\ &= \hbar^2 (l(l+1) - m(m \pm 1))\end{aligned}$$

Ma posso anche dire che:

$$\begin{aligned}\langle l, m | L_{\mp} L_{\pm} | l, m \rangle &= \langle L_{\pm} l, m | L_{\mp} l, m \rangle = \cancel{A_e^m} \cancel{A_e^{m \pm 1}} \\ &\quad \text{perch\u00e9 } (L_{\mp})^{\dagger} = L_{\pm} \\ &= |A_e^m|^2 \langle l, m \pm 1 | l, m \pm 1 \rangle \\ &\quad \text{"1"}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_e^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}$$