Corollario Sia $T \in U(n)$. Allora esiste $U \in U(n)$ t.c. $D = U^{-1} T U$ sia diagonale.

Es $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2) \subset U(2)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$$p_{R_\theta} = \begin{vmatrix} \cos\theta - x & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - x \end{vmatrix} = (\cos\theta - x)^2 + \sin^2\theta = x^2 - 2\cos\theta \cdot x + 1$$

$$\lambda = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

$\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow R_{2k\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonale

$\theta = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow R_{(2k+1)\pi} = -I_2$ diagonale

$\theta \neq k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda_1 = \cos\theta - i\sin\theta$, $\lambda_2 = \cos\theta + i\sin\theta$
$(\Rightarrow \sin\theta \neq 0)$ autovalori distinti

$\lambda_1)$ $\begin{pmatrix} i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & i\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad ix - y = 0$; $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$\lambda_2)$ $\begin{pmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad 1 - iy = 0$; $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ $\qquad (u_1, u_2)$ base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che diagonalizza R_θ

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \qquad {}^t\overline{U} R_\theta U = \begin{pmatrix} \cos\theta - i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta + i\sin\theta \end{pmatrix}$$

OSS Gli autovalori dipendono da θ, ma la base diagonalizzante no.

Teorema Sia V uno spazio vettoriale Euclideo (o Hermitiano) e sia $f \in End(V)$ autoaggiunto. Siano $v, w \in V - \{0\}$ autovettori di f relativi ad autovalori distinti. Allora v e w sono ortogonali.

Dim $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$, autovalori corrispondenti risp. a v e w: $f(v) = \lambda v$, $f(w) = \lambda w$.

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle = \langle v, \mu w \rangle$$
$$= \mu \langle v, w \rangle \implies (\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0 \implies$$
$\langle v, w \rangle = 0$ perché $\lambda - \mu \neq 0$.

OSS Quindi gli autospazi sono a due a due ortogonali.

Decomposizione ai valori singolari (SVD)

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Diciamo che A è diagonale se $a_{ij} = 0 \;\forall i \neq j$.

Teorema Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Allora $\exists\, U \in U(m)$, $W \in U(n)$ $\exists\, D \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ t.c. $A = W D\, {}^t\overline{U}$. Possiamo assumere che le entrate diagonali di D siano non negative e in ordine decrescente. Se A è reale possiamo scegliere $U \in O(n)$ e $W \in O(m)$.

Dim A meno di passare ad ${}^t\overline{A}$ possiamo assumere $n \leq m$.

$B := {}^t\overline{A} A \in M_n(\mathbb{C})$; ${}^t\overline{B} = {}^t\overline{({}^t\overline{A} A)} = {}^t({}^tA \overline{A}) = {}^t\overline{A} A = B$

$\implies B$ Hermitiana. $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di B, $v \in \mathbb{C}^n$ autovettore con $\|v\| = 1 \implies {}^t\overline{v} B v = \lambda\, {}^t\overline{v} v = \lambda$

$\implies \lambda = {}^t\overline{v}\, {}^t\overline{A} A v = {}^t(\overline{Av}) A v = \|Av\|^2 \geq 0$.

Siano $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ gli autovalori di B contati con le rispettive molteplicità. Per il teorema spettrale Hermitiano (Euclideo nel caso $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$) esiste $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale diagonalizzante per $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$ nel caso reale).

$$\langle Au_i, Au_j \rangle = {}^t(\overline{Au_i})\, Au_j = {}^t\bar{u}_i\, {}^t\bar{A} A u_j = {}^t\bar{u}_i B u_j = \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle$$
$$= \lambda_j \delta_{ij} \implies Au_1, \dots, Au_n \in \mathbb{C}^m \text{ ortogonali}$$

Dato che $\operatorname{Im} L_A = \operatorname{Span}(Au_1, \dots, Au_n) = \operatorname{Span}(Au_1, \dots, Au_r)$ con $r = \operatorname{rg} A$ (vettori ortogonali non nulli sono lin. indip.).

$\|Au_j\| = \sqrt{\lambda_j} =: \mu_j$

$$w_j = \frac{Au_j}{\mu_j}, \quad j = 1, \dots, r \implies w_1, \dots, w_r \in \mathbb{C}^m \text{ ortonormali}$$

$\implies \exists\, w_{r+1}, \dots, w_m \in \mathbb{C}^m$ t.c. $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ base ortonormale di $\mathbb{C}^m$. $D = \operatorname{diag}_{m,n}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ la matrice diagonale $m \times n$ avente μ_i nel posto (i,i) e 0 altrimenti.

Si ha $A = WD\,{}^t\overline{U}$, $U = (u_1 \dots u_n)$, $W = (w_1 \dots w_m)$.

__Applicazione__ compressione delle immagini digitali

F immagine in toni di grigio $\implies F \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ con le entrate che rappresentano il tono di grigio dei pixel.

Per le immagini a colori RGB (red, green, blue) servono tre matrici $F_R, F_G, F_B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, con entrate nell'intervallo $[0, 255]$.

$F = UD\,{}^t\overline{W} \rightsquigarrow F' = U'D'\,{}^t\overline{W}'$ approssima F dove U', D', W ottenute da U, D, W prendendo le prime s colonne, $1 \leq s \leq n$.

Prodotto vettoriale

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$X \times Y \overset{def}{=} \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

prodotto vettoriale

Es $\quad e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2$

Si verifica facilmente che il prodotto vettoriale è bilineare e alternante: $X \times Y = - Y \times X$

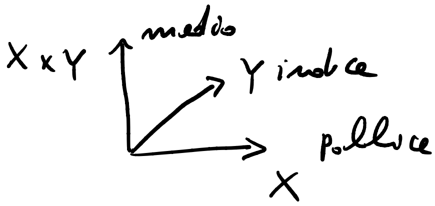
$X \times Y = 0_{\mathbb{R}^3} \iff X$ e Y sono proporzionali

$\|X \times Y\| = \|X\| \, \|Y\| \sin \widehat{XY}$

$X \times Y$ ortogonale a X e $Y \iff X \times Y \in \mathrm{Span}(X, Y)^{\perp}$.

$\forall \, M \in SO(3), \quad M(X \times Y) = (MX) \times (MY)$

Il verso si ottiene con la regola della mano destra



Iperpiano

$H: a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b, \quad H \subset \mathbb{R}^n$ iperpiano affine

$A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

La giacitura è $H_0: a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$

$\dim H = \dim H_0 = n - 1 \qquad A \in H_0^{\perp}$, infatti $H_0: \langle A, X \rangle = 0$.

Es piano in $\mathbb{R}^3$ passante per $q = (1, 2, 0)$

e avente giacitura $W = \text{Span}(v, w)$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3e_1 - 3e_2 - 6e_3 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in W^{\perp}$$

$H: \; x - y - 2z + c = 0$

$1 - 2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 1$

$H: \; x - y - 2z + 1 = 0$.

$\left(\frac{u \times v}{\|u \times v\|}, \frac{u \times w}{\|u \times w\|} \right)$ base ortonormale di W.