LOGICA

Lezione 13: Torniamo al Calcolo dei Predicati

Laura Nenzi

DIA – Università degli Studi di Trieste

Regole sui Quantificatori

- Cosa si può concludere da $\forall x P$?
  - $\forall x P \to P[t/x]$ t termine arbitrario
- Quando si può concludere $\forall x P$?
  - $\Gamma \vdash P[y/x]\ allora\ \Gamma \to \forall x P$ y non compare libera in Γ
- Esempio:
  - $P(y) \vdash D(s(y))$
  - $P(y) \vdash \forall x\ D(s(x))$ non è vero

Regole sui Quantificatori

- Quando si può concludere da $\exists x P$?
  - $P[t/x] \rightarrow \exists x P$ $\quad$ t termine arbitrario
- Cosa si può concludere da$\exists x P$?
  - se $\Gamma, P[y/x] \vdash C$ $allora$ $\Gamma, \exists x P \rightarrow C$ $\quad$ y non compare libera in Γ o C

- Esempio:
  - $P(y) \vdash D(s(y))$
  - $\exists x P(x) \vdash D(s(y))$ non è vero

Deduzione naturale

- $(\forall i)$ $\quad \dfrac{P[y/x]}{\forall x P}$ $\quad y \notin FV(foglie\ non\ cancellate\ di\ P[y/x])$
- $(\forall e)$ $\quad \dfrac{\forall x P}{P[t/x]}$ $\quad t$ termine arbitrario
- $(\exists i)$ $\quad \dfrac{P[t/x]}{\exists x P}$ $\quad t$ termine arbitrario
- $(\exists e)$ $\quad \dfrac{\exists x P \qquad \begin{matrix}[P[y/x]] \\ Q\end{matrix}}{Q}$ $\quad y \notin FV(Q) \cup FV(foglie\ non\ cancellate\ di$ Q) a parte $P[y/x]$

Regole DN

- $(\wedge e.1)$ $\dfrac{A \wedge B}{A}$
- $(\wedge e.1)$ $\dfrac{A \wedge B}{B}$
- $(\wedge i)$ $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$
- $(\vee i.1)$ $\dfrac{A}{A \vee B}$
- $(\vee i.2)$ $\dfrac{B}{A \vee B}$
- $(\vee e)$ $\dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A] & [B] \\ C & C\end{matrix}}{C}$
- $(\rightarrow e)$ $\dfrac{A \quad A \rightarrow B}{B}$
- $(\rightarrow i)$ $\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B}$
- $(\perp e)$ $\dfrac{\perp}{A}$
- $(\neg e)$ $\dfrac{A \quad \neg A}{\perp}$
- $(\neg i)$ $\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \perp\end{matrix}}{\neg A}$
- (RAA) $\dfrac{\begin{matrix}[\neg P] \\ \perp\end{matrix}}{P}$
- $(\forall i)$ $\dfrac{P(y)}{\forall x P}$
- $(\forall e)$ $\dfrac{\forall x P}{P(t)}$
- $(\exists i)$ $\dfrac{P(t)}{\exists x P}$
- $(\exists e)$ $\dfrac{\exists x P \quad \begin{matrix}[P(y)] \\ Q\end{matrix}}{Q}$

① $\vdash p \vee \neg p$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(p \vee \neg p)]^2 \quad \dfrac{[\neg p]^3}{p \vee \neg p}}{\perp}}{p}\,3 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(p \vee \neg p)]^1 \quad \dfrac{[p]^2}{p \vee \neg p}}{\perp}}{\neg p}\,2\ (\neg i)}{\dfrac{\perp}{p \vee \neg p}\,1\ (RAA)}
$$

$[\neg p]^3$

$[p]^2$

$[\neg(p \vee \neg p)]^1$

③ $\vdash \forall x P(x) \to \neg \exists x \neg P(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\exists x \neg P(x) \qquad \dfrac{[\neg P(y)]^3 \qquad \dfrac{[\forall y P(y)]^1}{P(y)}}{\bot}}{\bot}\,3\,(\exists e)}{\dfrac{\bot}{\neg \exists x \neg P(x)}\,2\,(\neg i)}$$

$$\dfrac{\neg \exists x \neg P(x)}{\forall x P(x) \to \neg \exists x \neg P(x)}\,2\,(\to i)$$

$[\neg P(y)]^3$

$[\exists x \neg P(x)]^2$

$[\forall x P(x)]^1$

4

NO

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{[P(z)]^1}}{\forall y\, P(y)}}{P(z) \to \forall y\, P(y)}\ 1\,(\to i)}{\forall x\,(P(x) \to \forall y\, P(y))}\ (\forall i)$$

$[P(z)]^1$

5

$[\exists x P(x)]^2$ $\cancel{P(y)}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x P(x)]^2 \quad \cancel{P(y)}}{P(y)}}{\forall x P(x)}}{\exists x P(x) \to \forall x P(x)}\ 1\,(\to i)$$

NO

$[\exists x P(x)]^1$

Esempio

- $p \to q \vdash \neg p \vee q$

Esempio

- $\forall x(Px \vee Px) \vdash \forall x Px$

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \vee Px)}{Pa \vee Pa}\,\forall\text{Elim} \qquad [Pa] \qquad [Pa]}{\dfrac{Pa}{\forall x Px}\,\forall\text{Intro}}\,\vee\text{Elim}$$

Esempio

- $\exists x Px \ \vdash \ \exists x(Px \vee Qx)$

$$\dfrac{\exists x Px \qquad \dfrac{\dfrac{[Pa]}{Pa \vee Qa}\,\vee\text{Intro}}{\exists x(Px \vee Qx)}\,\exists\text{Intro}}{\exists x(Px \vee Qx)}\,\exists\text{Elim}$$

Esempio

- $\forall x \exists y Rxy \ \vdash \ \forall x \exists y \exists z (Rxy \ \wedge \ Ryz)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x \exists y Rxy$}
\RightLabel{$\forall$Elim}
\UnaryInfC{$\exists y Ray$}
\AxiomC{$\forall x \exists y Rxy$}
\RightLabel{$\forall$Elim}
\UnaryInfC{$\exists y Rby$}
\AxiomC{$[Rab]^2$}
\AxiomC{$[Rbc]^1$}
\RightLabel{$\wedge$Intro}
\BinaryInfC{$Rab \wedge Rbc$}
\RightLabel{$\exists$Intro}
\UnaryInfC{$\exists z (Rab \wedge Rbz)$}
\RightLabel{$\exists$Intro}
\UnaryInfC{$\exists y \exists z (Ray \wedge Ryz)$}
\RightLabel{$\exists\mathrm{Elim}^1$}
\BinaryInfC{$\exists y \exists z (Ray \wedge Ryz)$}
\RightLabel{$\exists\mathrm{Elim}^2$}
\BinaryInfC{$\exists y \exists z (Ray \wedge Ryz)$}
\RightLabel{$\forall$Intro}
\UnaryInfC{$\forall x \exists y \exists z (Rxy \wedge Ryz)$}
\end{prooftree}
$$

Calcolo dei sequenti

- $(\exists l)$ $\quad \dfrac{\Gamma, P[y/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x P \vdash \Delta}$ la variabile y deve essere **nuova**
- $(\exists r)$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash P[t/x], \exists x P, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x P, \Delta}$ Il termine t deve essere scelto tra i **vecchi** se ce ne sono, no var legate . Altrimenti ne prendiamo uno nuovo
- $(\forall l)$ $\quad \dfrac{\Gamma, \forall x P, P[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x P \vdash \Delta}$ Il termine t deve essere scelto tra i **vecchi** se ce ne sono, no var legate . Altrimenti ne prendiamo uno nuovo
- $(\forall r)$ $\quad \dfrac{\Gamma \vdash P[y/x], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x P, \Delta}$ la variabile y deve essere **nuova**

Calcolo dei sequenti

$$(\wedge l)\quad \frac{\Xi, \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Xi, A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\wedge r)\quad \frac{\Gamma \vdash \Xi, \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Xi, \Delta, B}{\Gamma \vdash \Xi, A \wedge B, \Delta}$$

$$(\vee l)\quad \frac{\Xi, \Gamma, A \vdash \Delta \quad \Xi, \Gamma, B \vdash \Delta}{\Xi, A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\vee r)\quad \frac{\Gamma \vdash \Xi, \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Xi, A \vee B, \Delta}$$

$$(\rightarrow l)\quad \frac{\Xi, \Gamma \vdash \Delta, A \quad \Xi, \Gamma, B \vdash \Delta}{\Xi, A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\rightarrow r)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Xi, B, \Delta}{\Gamma \vdash \Xi, A \rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg l)\quad \frac{\Xi, \Gamma \vdash \Delta, A}{\Xi, \neg A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\neg r)\quad \frac{\Gamma, A \vdash \Xi, \Delta}{\Gamma \vdash \Xi, \neg A, \Delta}$$

$$(\forall l)\quad \frac{\Xi, \Gamma, A[{}^{t}/_{x}], \forall x A \vdash \Delta}{\Xi, \forall x A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\forall r)\quad \frac{\Gamma \vdash \Xi, \Delta, A[{}^{y}/_{x}]}{\Gamma \vdash \Xi, \forall x A, \Delta}$$

$$(\exists l)\quad \frac{\Xi, \Gamma, A[{}^{y}/_{x}] \vdash \Delta}{\Xi, \exists x A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\exists r)\quad \frac{\Gamma, \vdash \Xi, \Delta, A[{}^{t}/_{x}], \exists x A}{\Gamma \vdash \Xi, \exists x A, \Delta}$$

Ξ rappresenta una sequenza di formule atomiche

Criterio di equità

- Criterio di equità:
  - Nell’esplorare un ramo, nessuna regola deve essere applicata all’infinito.

- Usando questo criterio ogni formula vera verrà dimostrata.

Terminazione

- terminazione con successo
  - S `e un quasi-assioma, cio`e un sequente in cui la stessa formula appare sia nella parte destra che in quella sinistra (ci si pu`o eventualmente restringere al caso di formule atomiche). In tale situazione diremo che il ramo `e chiuso.
- terminazione con fallimento
  - S `e un sequente $\Xi1 \vdash \Xi2$ composto unicamente da formule atomiche e tale che nessuna formula appare sia in $\Xi1$ che in $\Xi2$.

Utilizzo del calcolo

- Come per la logica proposizionale il calcolo dei sequenti può essere usato per:
  - la ricerca di dimostrazioni
  - la ricerca di contromodelli

Ricerca di dimostrazioni

- Per dimostrare che un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ è una verità logica:
  - lo si scrive in basso
  - si usano le regole proposizionali e predicative (con il criterio di equità)
  - la ricerca finisce quando si arriva, in tutti i rami della dimostrazione, ad un assioma del tipo $A(t_1, \dots, t_n) \vdash A(t_1, \dots, t_n)$.

Esempio

- $\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(y) \vdash A(y)}{\forall x(A(x) \wedge B(x)), A(y), B(y) \vdash A(y)}}{\forall x(A(x) \wedge B(x)), A(y) \wedge B(y) \vdash A(y)}}{\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash A(y)}}{\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x\, A(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B(y) \vdash B(y)}{\forall x(A(x) \wedge B(x)), A(y), B(y) \vdash B(y)}}{\forall x(A(x) \wedge B(x)), A(y) \wedge B(y) \vdash B(y)}}{\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash B(y)}}{\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x B(x)}}{\forall x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)}$$

Ricerca di contromodelli

- Si procede come per la ricerca di dimostrazioni.
- Si considerano solo due tipo di rami:
  - quelli che terminano senza arrivare ad un assioma.
  - quelli che non terminano nonostante l’uso del criterio di equità.

Rami che terminano

- Abbiamo lo stato terminale con fallimento quando:
- ci sono solo formule atomiche o quantificatori universali prima di $\vdash$ o esistenziali dopo di $\vdash$
- sono state fatte tutte le possibili istanziazioni $A(t/x)$, con termini t presenti nel ramo, per i quantificatori universali prima di $\vdash$ ed esistenziali dopo di $\vdash$.

Contromodello

- Struttura $S = (D, I)$ e ambiente ξ^S
- D = {tutti i termini, tranne le variabile legate, nel ramo}
- $\xi^S\ (x) = x$ per tutte le variabili libere nel ramo
- $I(c)\ =\ c$ per tutte le costanti nel ramo
- $I(f(t_1, t_2, \dots, t_n))\ =\ f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ per tutte le funzioni nel ramo
- $I(A(t_1, t_2, \dots, t_n)) =\ 1$ sse $A(t_1, t_2, \dots, t_n)$ compare a sinistra di$\vdash$.

Esempio

- $\forall x\big(A(x) \rightarrow B(x)\big) \vdash \exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$

$$\begin{array}{c}
\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), B(y), A(y) \vdash B(z), A(z) \\
\hline
\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), B(y), A(z) \rightarrow B(z), A(y) \vdash B(z) \; .... \\
\hline
\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), A(y) \rightarrow B(y), A(z) \rightarrow B(z), A(y) \vdash B(z) \\
\hline
\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), A(y) \vdash B(z) \\
\hline
\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), A(y) \vdash \forall x B(x) \\
\hline
\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \exists x A(x) \vdash \forall x B(x) \\
\hline
\forall x\big(A(x) \rightarrow B(x)\big) \vdash \exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)
\end{array}$$

Esempio

- ramo terminato senza assiomi:
  - $\forall x\big(A(x) \rightarrow B(x)\big), B(y), A(y) \vdash B(z), A(z)$

- contromodello
  - $D = \{y, z\}$
  - $\xi^S(y) = y, \xi^S(z) = z$
  - $I(B(y)) = I(A(y)) = 1$
  - $I(B(z)) = I(A(z)) = 0$
  - $\underbrace{\forall x\big(A(x) \rightarrow B(x)\big)}_{1} \vdash \underbrace{\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)}_{0}$

Rami che non terminano

- Caso più difficile:
  - bisogna prevedere l'andamento del ramo infinito.
  - Non sempre è possibile trovare un contromodello.
- Vediamo un esempio.

Esempio

- $\exists x A(x), \forall y \left(A(y) \to A\left(f(y)\right)\right) \vdash$

$$\underline{A(z), A(f(z)), \dots, A(f^{i}(z)), \forall y(A(y) \to A(f(y))) \vdash \dots}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\overline{A(z), \forall y(A(y) \to A(f(y))), A(f(z)), A(f(z)) \to A(f(f(z))) \vdash \quad \dots}$$

$$\overline{A(z), \forall y(A(y) \to A(f(y))), A(f(z)) \vdash \qquad \dots}$$

$$\overline{A(z), \forall y(A(y)\ A(f(y))), A(z) \to A(f(z)) \vdash}$$

$$\overline{A(z), \forall y(A(y) \to A(f(y))) \vdash}$$

- $$\frac{}{\exists x A(x), \forall y \left(A(y) \to A\left(f(y)\right)\right) \vdash}$$

Esempio

- $A(z), A(f(z)), \ldots, A(f^i(z)), \forall y(A(y) \rightarrow A(f(y))) \vdash$
- contromodello:
- $D = \{z, f(z), f(f(z)), \ldots, f^i(z), \ldots\}$
- $\xi^S(z) = z$
- $I(f^i(z)) = f^i(z)\, per\ ogni\ i > 0$
- $I(A(f^i(z))) = 1\, per\ ogni\ i > 0$
- $I(A(z)) = 1$
- $\underbrace{\exists x A(x), \forall y\left(A(y) \rightarrow A\left(f(y)\right)\right)}_{1} \vdash$

Esempio

- In realtà potevamo trovare un contromodello più semplice:
- contromodello:
- $D = \{a\}$
- $I(a) = a$
- $I(f(a)) = f(a)$
- $I(A(a)) = 1$
- $\underbrace{\exists x A(x), \forall y \left(A(y) \rightarrow A\left(f(y)\right)\right)}_{1} \vdash$

Teorema di correttezza

- $\Gamma \vdash \Delta \Rightarrow \ \Gamma \vDash \Delta$.
- Sia un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ della logica predicativa, allora non esiste nessuna interpretazione (S, ξ^S) per cui si abbia $(S, \xi^S) \vDash P$ per ogni $P \in \Gamma$ e (S, ξ^S) ogni $Q \in \Delta$.
- Ovvero: se P è dimostrabile con i sequenti allora P è una verità logica.

Teorema di completezza

- $\Gamma \vDash \Delta \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$.
- Se il sequente $\Gamma \vdash \Delta$ non è dimostrabile allora esiste una interpretazione (S, ξ^S) tale che $(S, \xi^S) \vDash P$ per ogni $P \in \Gamma$ e $(S, \xi^S) \nvDash Q$ ogni $Q \in \Delta$.
- Ovvero: se P non è dimostrabile con i sequenti allora P non è una verità logica.

Semi-decidibilità

- se una dimostrazione esiste si e` sicuri prima o poi di trovarla; in caso contrario, l'algoritmo potrebbe non terminare affatto.
- Teorema 5.25 (di Church)
  - Non esiste alcun algoritmo (metodo, procedura generale . . .) che consente di decidere la validità di una qualunque formula della logica del primo ordine.
- OSS: il problema della non validità di una formula è (computazional-mente) equivalente a quello della soddisfacibilità
- OSS: Il fatto che la non esistenza di un procedimento generale di de-cisione non preclude, tuttavia, la possibilità che per particolari sottoinsiemi di formule un tale procedimento possa esistere