Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2021/2022 - 18 gennaio 2022
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale.

Si enunci e si dimostri la diseguaglianza di Cauchy - Schwarz e si dia la definizione di angolo convesso tra vettori non nulli.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 \\ -x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) **(3 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi.

(c) **(1 punti)** Si determini, motivando la risposta, la dimensione e una base dell'immagine $f(H)$ del piano vettoriale H di equazioni parametriche

$$H : \begin{cases} x_1 & = t \\ x_2 & = s \\ x_3 & = -t \end{cases}$$

(d) **(1 punto)** Si dica, motivando la risposta, se il piano H del punto sopra contiene autovettori per f oppure no.

(e) **2 punti** Si dica se il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ è compatibile, e in caso affermativo si trovi la sua generica soluzione.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- **(3 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

- **(4 punti)** Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

- **(3 punti)** Si scrivano le matrici di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$ e dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{E}$.

(4) • **(4 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette r e s_a dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$r : \begin{cases} x + y - 2z &= 2 \\ x - y &= -1 \end{cases} \qquad s_a : \begin{cases} x + z &= 1 \\ y + z &= a \end{cases}$$

– si dimostri che r ed s_a non sono mai parallele;
– si determini il valore di a per cui r ed s_a risultano incidenti.

• **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana del piano L passante per il punto $(0, 1, 2)$, e ortogonale alla retta

$$r : \begin{cases} x = & 1 - t \\ y = & 2 - 3t \\ z = & 3 + t \end{cases}$$