Secondo Parziale
Metodi Matematici per l'IA

19-01-2022

Nome e Cognome:

Esercizio 1 (5 punti)**.**

1. Sia $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ e sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, si dimostri che, se definiamo $h(x) = f(ax)$, allora
$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

2. Utilizzando le formule
$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\omega}(\omega) = \frac{1}{i}\int_{\mathbb{R}} xf(x)\ e^{-i\omega x}\mathrm{d}x, \qquad \widehat{f'}(\omega) = i\omega\ \hat{f}(\omega),$$
calcolare la trasformata di Fourier della Gaussiana normalizzata $G_a(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\ e^{-ax^2}$ per $a > 0$.

Dimostrazione.

1. Calcoliamo $\hat{h}(\omega)$
$$\begin{aligned}\hat{h}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(ax)\,e^{-i\omega x}\mathrm{d}x,\\ &= \pm\,\mathrm{sgn}(a)\int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-i\omega\frac{t}{a}}\frac{\mathrm{d}t}{a}, && t = ax,\\ &= \frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-i\frac{\omega}{a}\ t}\mathrm{d}t,\\ &= \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).\end{aligned}$$

2. Sia $G = G_1$, utilizzando le formule suggerite si ha che
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{G}}{\mathrm{d}\omega}(\omega) &= -\,i\int xG(x)\ e^{-i\omega x}\mathrm{d}x,\\ \widehat{G'}(\omega) &= -\,2\int x\ G(x)\,e^{-i\omega x}\mathrm{d}x,\\ &= i\omega\hat{G}(\omega).\end{aligned}$$
definiamo ora la quantità
$$A = \int xG(x)\ e^{-i\omega x}\mathrm{d}x,$$
abbiamo dunque ottenuto le due equazioni
$$\frac{\mathrm{d}\hat{G}}{\mathrm{d}\omega}(\omega) = -i\ A, \qquad i\omega\ \hat{G}(\omega) = -2A,$$
dalla quale deriviamo l'equazione differenziale
$$\omega\ \hat{G} = -2\ \frac{\mathrm{d}\hat{G}}{\mathrm{d}\omega},$$
che, se risolta, da il risultato desiderato
$$\hat{G}(\omega) = e^{-\omega^2/4}.$$
Usando il primo punto dell'esercizio si prova che $\hat{G}_a(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

□

Esercizio 2 (5 punti)**.** Siano $f, g \in L^1\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)$ due funzioni T periodiche. Definiamo l'operazione di *convoluzione periodica* come

$$f * g\,(x) = \int_{-T/2}^{T/2} f\,(x-y)\, g\,(y)\, \mathrm{d}y.$$

Siano ora $p, q, r \in [1, \infty]$ tali che[1] $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, l'operatore di convoluzione periodica soddisfa la seguente disuguaglianza

$$\|f * g\|_{L^r\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)} \leq \|f\|_{L^p\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)} \|g\|_{L^q\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)}.$$

Provare che

1. $f * g = g * f$,
2. Sia $k \in \mathbb{N}$, $f^{(j)} \in L^\infty\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)$ per ogni $j = 0, 1, \ldots, k$ e $g \in L^1\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)$, dimostrare che
$$\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}(f * g) \in L^\infty\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right) \qquad \forall\, j = 0, 1, \ldots, k.$$
3. Sia $k \in \mathbb{N}$, $f^{(j)} \in L^1\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)$ per ogni $j = 0, 1, \ldots, k$ e $g \in L^\infty\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)$, dimostrare che
$$\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}(f * g) \in L^\infty\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right) \qquad \forall\, j = 0, 1, \ldots, k.$$
4. Data $f \in L^2([-\pi, \pi])$ si dia la definizione della *trasformata di Hilbert* $\mathcal{H}f$.
5. Definiamo l'operatore
$$\mathcal{K}f\,(x) = \mathcal{H}f\,(x) - \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{f\,(x-z)}{\sin(z/2)}\mathrm{d}z,$$
utilizzando i risultati provati nei punti 1–3 dimostrare che per ogni $f \in L^1([-\pi, \pi])$ si ha che
$$\left\|\partial_x^j(\mathcal{K}f)\right\|_{L^\infty([-\pi,\pi])} < \infty,$$
per ogni $j \in \mathbb{N}$ e concludere che $\mathcal{K}f \in \mathcal{C}^\infty$.

Suggerimento: il passaggio al limite per $\varepsilon \to 0$ nella definizione di $\mathcal{H}$ è necessario solamente in quanto il nucleo di convoluzione caratteristico di $\mathcal{H}$ è una funzione che *non* è assolutamente integrabile in $z = 0$. Qualora il nucleo convolutivo sia una funzione assolutamente integrabile in $z = 0$ l'operatore valore principale, ossia $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \bullet\, \mathrm{d}z$, può essere sostituito da un normale operatore di integrazione $\int_{-\pi}^{\pi} \bullet\, \mathrm{d}z$.

Dimostrazione.

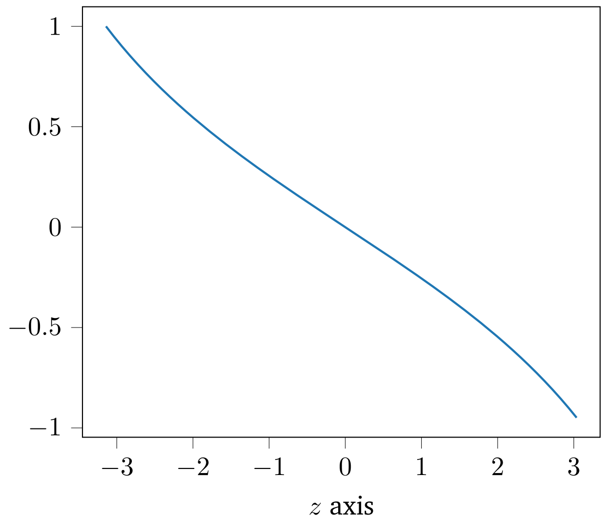
1.
$$\begin{aligned} f * g\,(x) &= \int_{-T/2}^{T/2} f\,(x-y)\, g\,(y)\, \mathrm{d}y, \\ &= -\int_{x+T/2}^{x-T/2} f\,(t)\, g\,(x-t)\, \mathrm{d}t, && t = x - y, \\ &= \int_{x-T/2}^{x+T/2} f\,(t)\, g\,(x-t)\, \mathrm{d}t, \\ &= g * f\,(x) \end{aligned}$$

2. È semplice vedere che
$$\partial_x^j(f * g) = \partial_x^j f * g,$$
e quindi applicando la disuguaglianza suggerita si conclude.

3. Analogo al punto 2.

[1] Qui si applica la convenzione $1/\infty = 0$.

Plot of the function $\dfrac{\cos(z/2)-1}{\sin(z/2)}$ in $(-\pi, \pi)$



4. Se $f \in L^2$ definiamo

$$\mathcal{H}f\left(x\right) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} \cot\left(z/2\right) f\left(x - z\right) \mathrm{d}z.$$

5. Notimao che $\mathcal{K}f$ si può scrivere come

$$\mathcal{K}f\left(x\right) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\left(z/2\right) - 1}{\sin\left(z/2\right)} f\left(x - z\right) \mathrm{d}z,$$

   e sappiamo che

$$\frac{\cos\left(z/2\right) - 1}{\sin\left(z/2\right)} = -\frac{2\sin^2\left(z/4\right)}{2\sin\left(z/4\right)\cos\left(z/4\right)} = -\tan\left(z/4\right),$$

   che è una funzione $\mathcal{C}^{\infty}\left(\left[-\pi, \pi\right]\right)$ (si veda figura allegata), aplicando il punto 2 si conclude.

$\square$